Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Ángulos y Triángulos

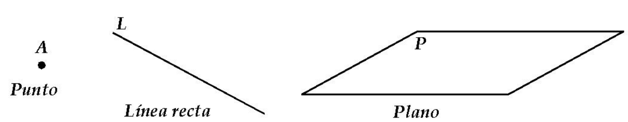
6.8.1 Conceptos básicos: Geometría Plana

6.8.1.1 Objetivo de aprendizaje

- Conocer los axiomas, postulados, teoremas y corolarios que rigen la geometría plana, y desarrollar capacidades de deducción para lograr demostraciones mediante un conjunto de razonamientos.
- Caracterizar y definir con precisión elementos geométricos, de tal forma que se puedan construir y clasificar a partir de sus propiedades.
- Identificar las rectas y los puntos notables de un triángulo y reconocer sus propiedades, de tal forma que puedan ser aplicados a problemas de aplicación.

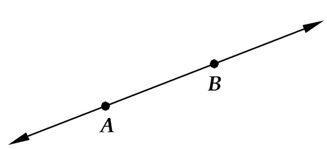
6.8.1.2 Matemática formal

Definición 6.8.1 Punto, línea recta y plano: *Son conceptos que no se definen, pero se utiliza su representación gráfica y se denotan usando letras mayúsculas así.*

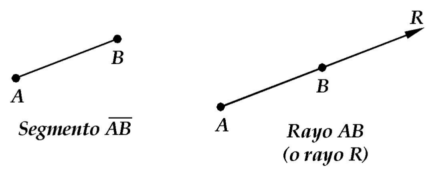


- Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta.
- Se dice que tres puntos distintos son *colineales* si están sobre una misma línea recta.

Si L es una línea recta y A, B son dos puntos sobre ella, podemos hablar también de la recta AB.



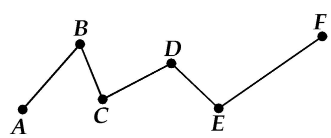
Definición 6.8.2 Semirrecta y segmento rectilíneo: *toda recta se prolonga al infinito por sus dos extremos; por eso su longitud no puede ser calculada. Si en una recta se fija un punto, éste divide la recta en dos partes opuestas llamadas semirrectas. Si en una recta se fijan dos puntos, la parte de recta comprendida entre dichos puntos se denomina segmento rectilíneo.*



Para medir los segmentos rectilíneos se emplean las medidas de longitud y se usa generalmente una regla graduada en decímetros, centímetros y milímetros.

Decimos que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si tienen la misma longitud y lo denotamos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Definición 6.8.3 Línea Poligonal *(o línea quebrada) es una línea compuesta de varios segmentos rectos que siguen diferentes direcciones.*



Línea Poligonal

Definición 6.8.4 Figura Plana *es una región del plano limitada por una línea cerrada.*

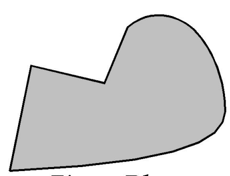
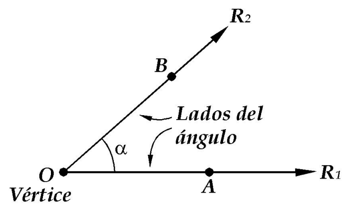


Figura Plana

Definición 6.8.5 Polígono *es una figura plana limitada por rectas que forman una línea quebrada cerrada.*

Definición 6.8.6 *Un* **ángulo** *es la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto. Estas rectas se llaman lados del ángulo y el punto común, vértice.*



Para denotar un ángulo se utiliza $\angle AOB$ o $\angle BOA$, por una letra griega α, β, γ, $\ldots$, por un número $1, 2, 3, \ldots$, o por una letra minúscula $a, b, c, d, \ldots$

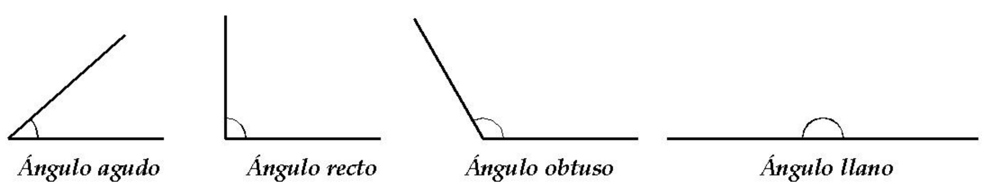
6.8.1.2.1 Medida de ángulos

Para medir los ángulos se toma como unidad de medida el *grado*, que es igual a $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta. Decimos que el $\angle AOB$ mide un grado, y lo denotamos $1°$.

6.8.1.2.2 Clases de ángulos

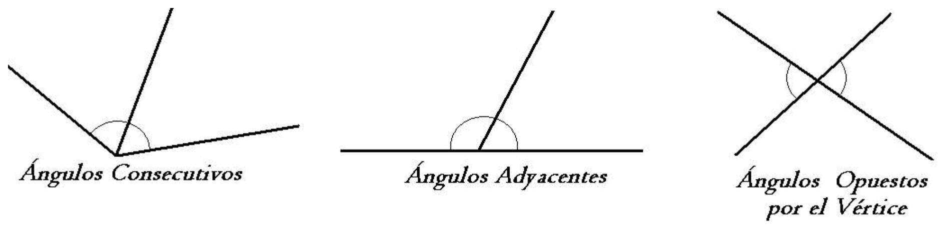
Definición 6.8.7 *Un ángulo se puede clasificar según su medida:*

- **Ángulo agudo** *es el que mide menos de* $90°$.
- **Ángulo recto** *es el que mide exactamente* $90°$.
- **Ángulo obtuso** *es el que mide más de* $90°$.
- **Ángulo llano** *es el que mide exactamente* $180°$.



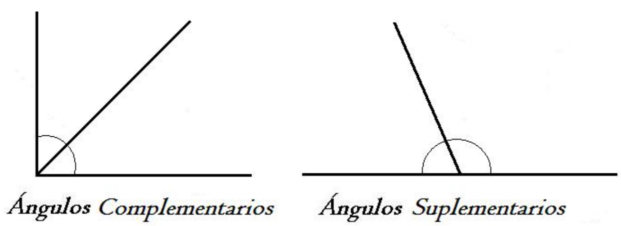
Definición 6.8.8 *Un ángulo se puede clasificar según su posición:*

- **Ángulos consecutivos** *son aquellos que tienen el vértice y un lado común.*
- **Ángulos adyacentes** *son dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado común y los otros dos pertenecen a la misma recta (es decir, la suma de la medida de los dos ángulos es igual a* $180°$*).*
- **Ángulos opuestos por el vértice** *son aquellos que tienen el vértice común y los lados del uno son prolongación de los del otro.*



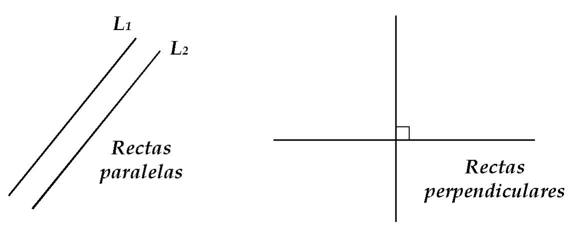
Definición 6.8.9 *Dos ángulos se pueden clasificar según su suma:*

- **Ángulos complementarios** *son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de un ángulo recto.*
- **Ángulos suplementarios** *son dos ángulos cuya suma de las medidas es igual a la de dos ángulos rectos.*



Se dice que dos rectas L_1 y L_2 en el plano, que tienen un único punto en común, se intersectan o intersecan en dicho punto, en caso contrario se dice que L_1 y L_2 son paralelas, y escribimos $L_1 \parallel L_2$. En particular, si L_1 y L_2 son dos rectas que tienen todos los puntos comunes, se dice que son rectas coincidentes.

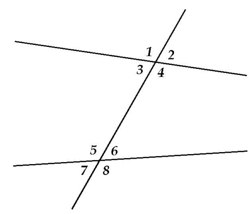
Si dos rectas L_1 y L_2 se intersectan formando un ángulo recto se dice que son perpendiculares, y escribimos $L_1 \perp L_2$.



Definición 6.8.10 *Ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante:*

- **Ángulos alternos internos** *son dos ángulos internos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.*
- **Ángulos alternos externos** *son dos ángulos externos no adyacentes, situados en distinto lado de la secante.*

- **Ángulos correspondientes** *son dos ángulos no adyacentes, situados en un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo.*



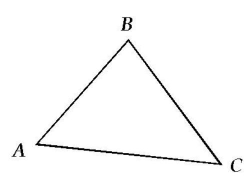
- **Ángulos alternos internos**: "1 y 8", "2 y 7".
- **Ángulos alternos externos**: "3 y 6", "4 y 5".
- **Ángulos correspondientes**: "1 y 5", "2 y 6", "3 y 7", "4 y 8".
- **Ángulos opuestos por el vértice**: "1 y 4", "2 y 3", "5 y 8", "6 y 7".

Teorema 6.8.1 *Si las dos rectas de la definición anterior son paralelas, entonces los pares de ángulos mencionados arriba son congruentes (puede verse la demostración de este teorema en el capítulo III del texto de F. J. Landaverde).*

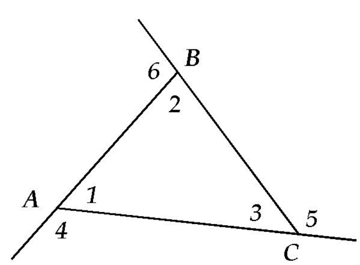
6.8.1.2.3 Triángulos

Definición 6.8.11 *Un triángulo es un polígono de tres lados.*

Se designan generalmente los ángulos de un triángulo por letras mayúsculas A, B, C, por ejemplo, y los lados opuestos a estos ángulos, por las mismas letras minúsculas a, b, c. Con frecuencia se sustituye la palabra triángulo por el símbolo $\triangle$.



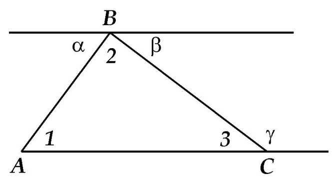
En el siguiente $\triangle ABC$, los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ se llaman *ángulos interiores o internos* del triángulo y los ángulos $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$ se llaman *ángulos exteriores o externos* del triángulo.



6.8.1.2.4 Propiedades de los triángulos

Teorema 6.8.2 *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos.*

Prueba



Tracemos por B una recta paralela a $\overline{AC}$, entonces:

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle 2 = 180° \text{ (Ecuación [1])}$$

Y como por teorema $\angle\alpha \cong \angle 1$ y $\angle\beta = \angle 3$, por ser alternos internos, entonces reemplazando en la ecuación [1]

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

Colorario 6.8.1 *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.*

Prueba
$\angle 3 + \angle\gamma = 180°$ ya que $\angle 3$ y $\angle\gamma$ son suplementarios. Ahora, como:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

Entonces:

$$\angle 3 = 180° - \angle 1 + \angle 2$$

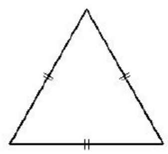
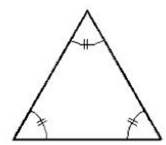
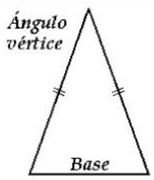
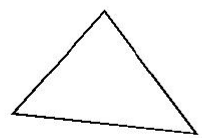
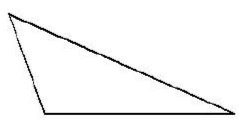
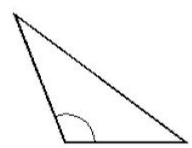
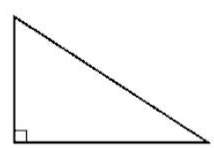
Luego,

$$180° - \angle 1 - \angle 2 + \angle\gamma = 180°$$

Y entonces,

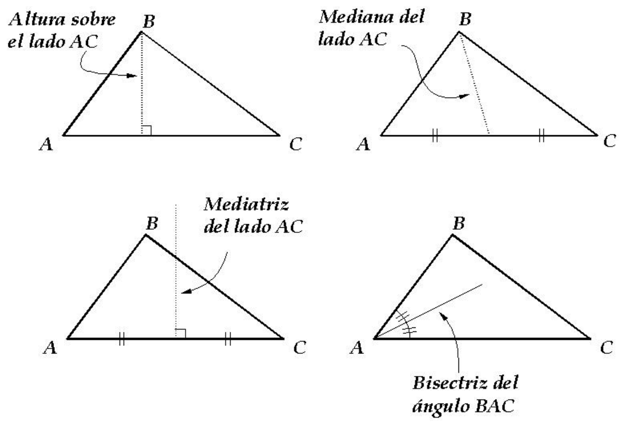
$$\angle\gamma = \angle 1 + \angle 2$$

6.8.1.2.5 Clasificación de triángulos

SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS		SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS	
Equilátero		**Equiángulo**	
	3 lados congruentes		3 ángulos internos congruentes
Isósceles		**Acutángulo**	
	2 lados congruentes		3 ángulos internos agudos
Escaleno		**Obtusángulo**	
	Ningún par de lados congruentes		1 ángulo interno obtuso
		Rectángulo	
			1 ángulo interno recto

6.8.1.2.6 Rectas y puntos notables en el triángulo

- **Altura**: cada una de las rectas que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, o a su prolongación. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado *ortocentro*.
- **Mediana**: cada una de las rectas que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado *baricentro*.
- **Mediatriz**: cada una de las rectas perpendiculares que pasan por el punto medio de cada lado. Se cortan en un punto llamado *circuncentro*.
- **Bisectriz**: cada una de las rectas que dividen sus ángulos en dos ángulos iguales. El punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo se llama *incentro*.



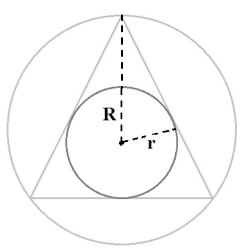
6.8.1.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Uno de los ocho ángulos formados al cortar dos rectas paralelas por una secante, vale $60°$. Halle el valor de cada uno de los siete restantes.

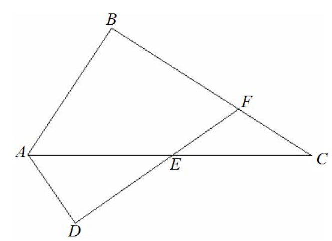
2. La longitud del radio de la circunferencia inscrita a un triángulo equilátero es $20cm$.

   (a) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

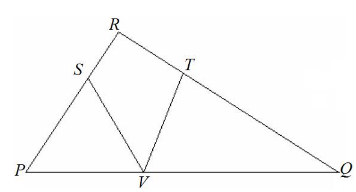
   (b) ¿Cuál es el perímetro del triángulo?



3. Referente al gráfico adjunto, se tienen las siguientes relaciones con respecto a las longitudes de los lados: $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| + 10$, $|\overline{EC}| = 12$, $|\overline{AC}| = 20$, $|\overline{EF}| = |\overline{FC}|$, $m(\angle BAC) = m(\angle EAD)$. Determine la longitud del lado $\overline{AD}$.



4. En la figura adjunta, el ángulo PRQ mide $\frac{\pi}{2}$, $\overline{QT} = \overline{QV}$, $|\overline{PS}| = |\overline{PV}|$. Determine la medida del ángulo SVT.



6.8.1.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Sea ABC un triángulo y C' el pie de la altura por el vértice C (esto es, C' es la intersección de la altura por C con el lado $\overline{AB}$). Sea P el punto de corte de la paralela a $\overline{AC}$ por C' con la mediatriz del segmento $\overline{CC'}$. Demuestre que el segmento $\overline{PC}$ mide la mitad que el lado $\overline{AC}$.

2. En el triángulo ABC, P es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto $\overline{BC}$. Demuestre que $\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{PC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}$

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, P el punto de corte de la bisectriz en A y el lado $\overline{BC}$ y Q el punto de corte de la bisectriz en B y el lado $\overline{AC}$. Sean M y N los pies de las perpendiculares a $\overline{AB}$ por P y por Q, respectivamente. Halle el ángulo NCM.

4. ¿Existe algún triángulo en el que las medidas de sus tres lados sean números naturales consecutivos y el ángulo mayor sea el doble que el menor? Si existe, determine sus medidas.

5. En el triángulo acutángulo ABC, $\overline{AH}$, $\overline{AD}$, y $\overline{AM}$ son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A, estando H, D y M en el lado $\overline{BC}$. Si las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{MD}$ son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcule la longitud del segmento $\overline{DH}$.

6. En el triángulo ABC, la bisectriz trazada desde A divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: $|\overline{BT}| = 572m$. Si dicha bisectriz corta a la mediana $\overline{BM}$ en los segmentos $|\overline{BD}| = 200m$ y $|\overline{DM}| = 350m$, calcule el lado a de dicho triángulo y plantea una ecuación con incógnita c para obtener el lado c (no hace falta que lo calcule explícitamente).

7. En un triángulo rectángulo isósceles, los lados iguales miden $3m$ de longitud. Calcule el perímetro del triángulo.

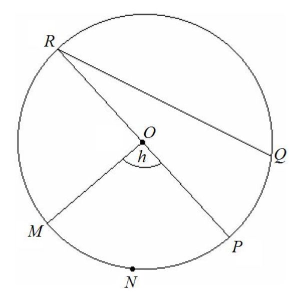
8. Considere tres triángulos ABC (uno acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo), haciendo uso de regla y compás trace en cada uno de ellos:

   (a) Las tres medianas, mediatrices, bisectrices y alturas

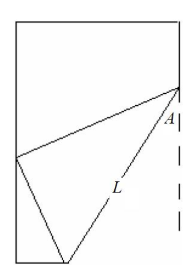
   (b) La circunferencia inscrita

   (c) La circunferencia cincunscrita

9. En el gráfico adjunto, los arcos $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, y $\widehat{PQ}$ tienen la misma longitud y O es el centro de la circunferencia. Determine la medida del ángulo PRQ.



10. La esquina inferior derecha de una página se dobla hasta alcanzar el lado mayor izquierdo, como se muestra en la figura. Si el ancho de la página es $6cm$ y $A = 30°$, determine la longitud L:



Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Congruencia y Semejanza de Triángulos

6.8.2 Semejanza y congruencia de triángulos

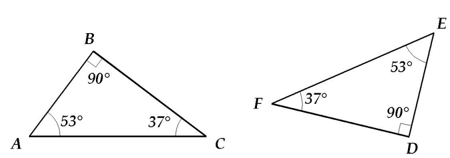
6.8.2.1 Objetivo de aprendizaje

- Conocer los axiomas, postulados, teoremas y corolarios que rigen a la geometría plana, y desarrollar capacidades de deducción para lograr demostraciones mediante un conjunto de razonamientos.
- Identificar las rectas y los puntos notables de un triángulo y reconocer sus propiedades, de tal forma que puedan ser aplicados a problemas de aplicación.

6.8.2.2 Matemática formal

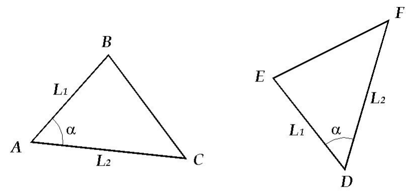
6.8.2.2.1 Congruencia de triángulos Dos triángulos son *congruentes* si los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los tres lados del otro, y los tres ángulos de uno son respectivamente congruentes con los tres ángulos del otro. Es decir, dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño.

Si el $\triangle ABC$ es congruente con el $\triangle EDF$, escribimos $\triangle ABC \cong \triangle EDF$



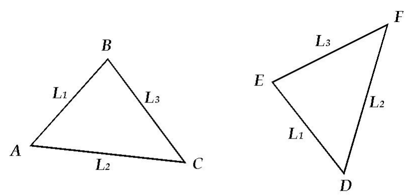
6.8.2.2.2 Criterios de congruencia Dos triángulos son congruentes si:

1. Dos pares de lados correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos, son congruentes. Este criterio se conoce como L-A-L (Lado-Ángulo-Lado).



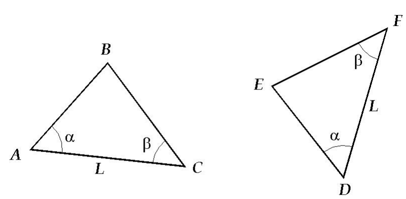
Los triángulos △ABC y △DEF son congruentes

2. Los tres pares de lados correspondientes son congruentes. Se conoce como criterio L-L-L (Lado-Lado-Lado).



Los triángulos △ABC y △DEF son congruentes

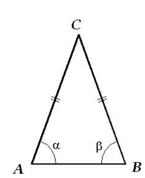
3. Un lado y los dos ángulos de los extremos de ese lado en un triángulo, son respectivamente congruentes con un lado y los dos ángulos de los extremos de ese lado, en el otro triángulo. Se conoce como criterio A-L-A (Ángulo-Lado-Ángulo).



Los triángulos △ABC y △DEF son congruentes

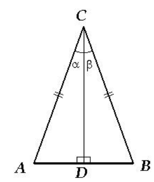
6.8.2.2.3 Relaciones entre algunos triángulos

- Si un triángulo ABC es isósceles entonces los ángulos de la base son congruentes.



Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ entonces $\alpha \cong \beta$

- La bisectriz del ángulo vértice de un triángulo isósceles es también altura, mediana y mediatriz de la base.



6.8.2.2.4 Semejanza de triángulos

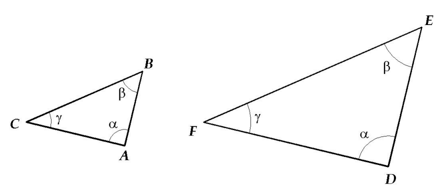
Definición 6.8.12 **Razón** *es el resultado de comparar dos cantidades. La razón geométrica es el resultado de comparar dos cantidades por su cociente, y se puede escribir como una fracción o separando las cantidades por dos puntos.*

Ejemplo 6.8.1 **Ejemplo***: La razón geométrica de 7 a 3 se puede escribir como* $\frac{7}{3}$ *o* $7:3$*. La razón de* 8 *a* 4 *es* 2 *ya que* $\frac{8}{4}=2$*.*

Definición 6.8.13 *Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando las razones de sus medidas son iguales.*

Ejemplo 6.8.2 **Ejemplo***:* $\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$ *es una proporción.*

Definición 6.8.14 *Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos ordenadamente iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Es decir, si tienen la misma forma (pero no necesariamente el mismo tamaño).*



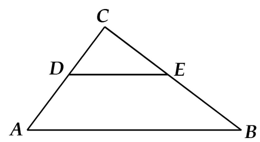
Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes y escribimos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$,$\angle C \cong \angle F$ y

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}. \tag{6.1}$$

6.8.2.2.5 Teorema de Thales

Teorema 6.8.3 *Todo segmento paralelo a un lado de un triángulo divide los otros dos en partes proporcionales (puede verse la demostración de este teorema en el capítulo X del texto de F. J. Landaverde).*

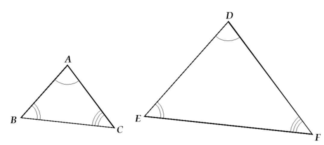
Si en ΔABC trazamos $\overline{DE} \| \overline{AB}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$



6.8.2.2.6 Criterios de semejanza

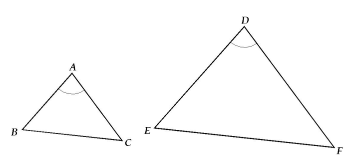
Como en la congruencia, podemos utilizar criterios para probar la semejanza de triángulos sin necesidad de probar la congruencia de todos los ángulos correspondientes y la proporcionalidad de todos los lados correspondientes. Estos criterios son:

1. Dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro triángulo. Se conoce como criterio A-A (Ángulo-Ángulo).



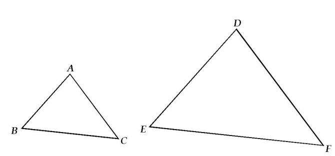
En el dibujo, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$. Es claro que $\angle C \cong \angle F$.

2 Los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados correspondientes del otro triángulo. Se conoce como criterio L-L-L (Lado-Lado-Lado).



En el dibujo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

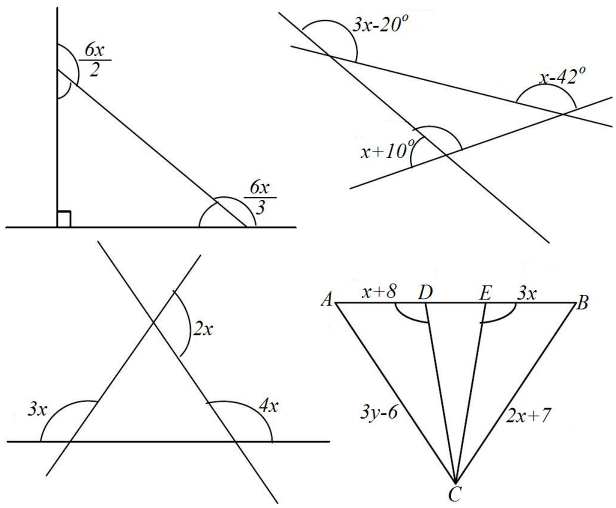
3 Un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo del otro triángulo, y los lados correspondientes que incluyen este ángulo son proporcionales. Se conoce como criterio L-A-L (Lado-Ángulo-Lado).



En el dibujo, $\angle A \cong \angle D$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

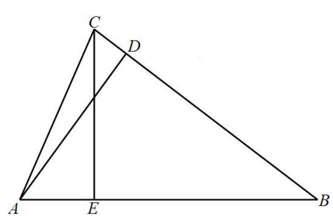
6.8.2.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Con los datos que se proporcionan en las figuras, calcule el valor de x:

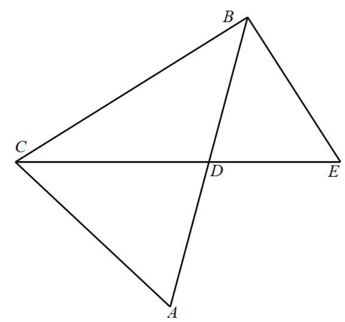


2. Demuestre lo siguiente:

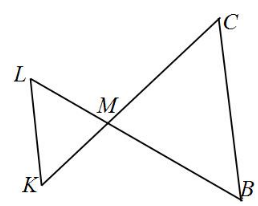
   (a) En la figura siguiente, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{CE} \perp \overline{AB}$. Demuestre que $|\overline{CE}| \cdot |\overline{AB}| = |\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|$:



   (b) $\overline{CD}$ bisectriz del ángulo ACB y $\angle ABE \cong \angle ACD$. Demuestre que $|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{BE}|$.



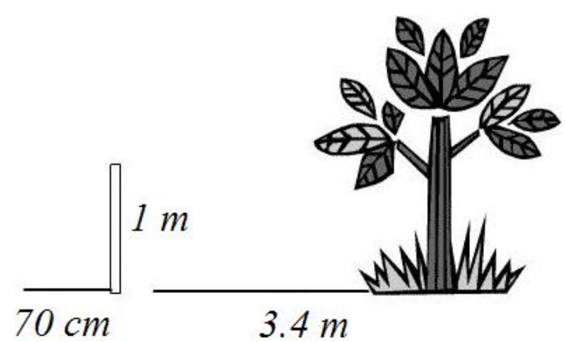
3. Dado que $\overline{LK} \parallel \overline{CB}$. Demuestre que: $\triangle LKM \sim \triangle BCM$



4. Una piscina tiene $2,3m$ de ancho; situándonos a $116cm$ del borde, desde una altura de $1,74m$, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene la piscina?

6.8.2.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

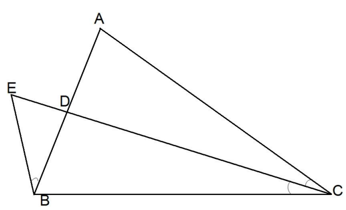
1. Si en un determinado instante del día una estaca de un metro produce una sombra de $70cm$ de longitud. ¿Cuál será la altura de un árbol que en ese mismo instante produce una sombra de $3,4m$ de longitud?



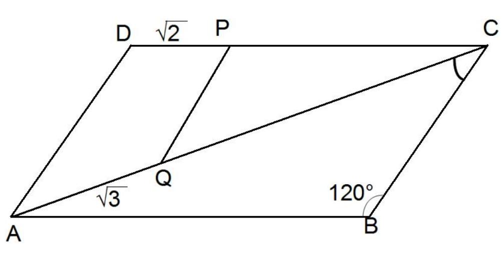
2. A $14m$ de la orilla de un río hay un muro con un agujero a mitad de altura. En un cierto momento del día la sombra del muro alcanza exactamente a la otra orilla del río y, en ese momento, la luz que pasa por el agujero se proyecta en el suelo a $10m$ de la base del muro. ¿A qué distancia se proyectará dicha luz cuando la sombra del muro retroceda hasta el centro del río?

3. Entre Sergio, de $152cm$ de altura, y un árbol, hay un pequeño charco en el que se refleja su copa. Calcule la altura de dicho árbol sabiendo que las distancias que separan a Sergio del lugar de reflejo en el charco y del árbol son de $3,2m$ y $10,7m$, respectivamente.

4. Si en $\triangle ABC$, $\overline{CD}$ es la bisectriz de $\angle BCA$ y $\angle ABE = \angle ACD$, demuestre que $\triangle ACD \sim \triangle DBE$ y que $\triangle ADC \sim \triangle CEB$.

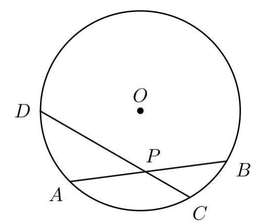


5. Sea $ABCD$ un paralelogramo, y $\overline{PQ}$ un segmento paralelo a $\overline{AD}$ con P y Q en los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$ respctivamente. $|\overline{AQ}| = \sqrt{3}$ y $|\overline{DP}| = \sqrt{2}$. Además se sabe que $\angle ABC = 120°$. Encuentre el valor de $\angle BCA$.

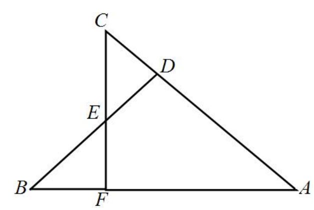


6. En un triángulo ABC, la bisectriz interna del $\angle A$ corta a $\overline{BC}$ en N. La bisectriz externa corta la extensión de $\overline{BC}$ en M. Si $|\overline{BC}| = 5$, $|\overline{AC}| = 6$ y $|\overline{AB}| = 4$, encuentre el valor de $\overline{MN}$.

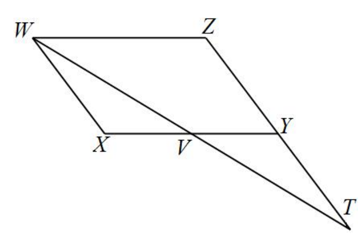
7. En la circunferencia de centro O, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se intersectan en P. Si $|\overline{AP}| = 9cm$, $|\overline{PB}| = 12cm$ y $|\overline{CP}| = 18cm$, entonces $\overline{PD}$ mide:



8. **Hipótesis**: $\overline{CF} \perp \overline{AB}$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. **Tesis**: $\triangle FBE \sim \triangle DEC$.



9. **Hipótesis**: $|\overline{WZ}| = |\overline{XY}|$; $|\overline{WX}| = |\overline{ZY}|$. **Tesis**: $\triangle WTZ \sim \triangle VWX$



10. Se quiere construir un jardín, de césped y flores, con forma de triángulo rectángulo. Se sabe que la altura y la proyección de un lado sobre el lado mayor (hipotenusa) miden $15,3m$ y $8,1m$, respectivamente. Calcule el perímetro del jardín.

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Áreas y Perímetros

6.8.3 Áreas y perímetros

6.8.3.1 Objetivo de aprendizaje

- Comprender y aplicar en situaciones problema las fórmulas de cálculo del área y perímetro de las principales figuras planas.

6.8.3.1.1 Matemática formal

En la guía acerca de "Ángulos y Triángulos", se había definido polígono como una *figura plana limitada por una línea quebrada cerrada*. Ahora hay que considerar algunos elementos del polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales y el perímetro.

Definición 6.8.15 Lados de un polígono *son las rectas que limitan el polígono.*

Definición 6.8.16 Ángulos de un polígono *son los formados por dos lados consecutivos en el interior del polígono.*

Definición 6.8.17 Ángulos exteriores de un polígono *son los formados por un lado cualquiera y la prolongación del lado adyacente.*

Definición 6.8.18 Vértices de un polígono *son los de los ángulos del polígono.*

Atendiendo al número de lados o ángulos, los polígonos reciben los siguientes nombres:

N.º de Lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octagono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentedecágono

Sin embargo, los demás polígonos podrían llamarse simplemente especificando la cantidad de lados, es decir, en vez de decir "icoságono" podría decirse "polígono de 20 lados", etc.

Definición 6.8.19 Polígono convexo *es el que tiene todos sus ángulos menores que 180º.*

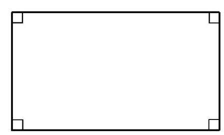
Definición 6.8.20 Polígono cóncavo *es el que tiene uno o varios ángulos mayores que 180º.*

6.8.3.2 Cuadriláteros

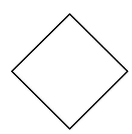
Definición 6.8.21 Paralelogramo *es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.*

De acuerdo con los lados y los ángulos, algunos paralelogramos reciben nombres especiales, así:

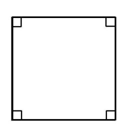
Definición 6.8.22 Rectángulo *es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud..*



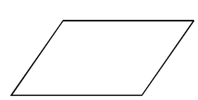
Definición 6.8.23 Rombo *es el paralelogramo cuyos cuatro lados son de igual longitud..*



Definición 6.8.24 Cuadrado *es el paralelogramo que tiene los lados iguales y los ángulos rectos (caso particular de rectángulo y de rombo).*

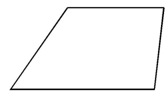


Definición 6.8.25 Romboide *es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y los ángulos oblicuos.*



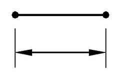
Otra de las clasificaciones de los cuadriláteros son los trapecios:

Definición 6.8.26 Trapecio *es el cuadrilátero que tan sólo tiene dos lados paralelos.*



6.8.3.2.1 Perímetro de un polígono

Definición 6.8.27 Perímetro *es la suma de las medidas de los lados del polígono. El perímetro se mide en unidades de longitud, como: milímetro (mm), centímetro (cm), pies (ft), entre otras.*

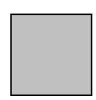


Unidad de longitud

6.8.3.2.2 Área de un polígono

Definición 6.8.28 Área *de una figura es la medida de su superficie.*

Unidad cuadrada: Es la figura limitada por un cuadrado cuyo lado mide una unidad de longitud. Se usan, entre otras, centímetros cuadrados (cm^2), la cual corresponde a una figura limitada por un cuadrado en el que cada lado mide $1cm$, milímetro cuadrado (mm^2), figura limitada por un cuadrado en el que cada lado mide $1mm$.



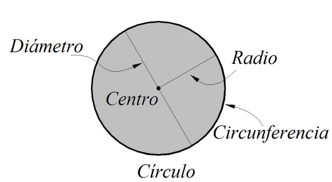
Unidad cuadrada

El área de un polígono es el número de unidades cuadradas necesarias para cubrir "perfectamente" la figura.

6.8.3.2.3 Circunferencia y círculo

Definición 6.8.29 *Una* **circunferencia** *es una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.*

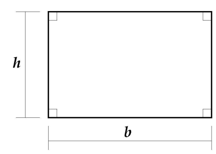
Definición 6.8.30 Círculo *es la superficie plana limitada por la circunferencia.*



Definición 6.8.31 Diámetro *es la recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro.*

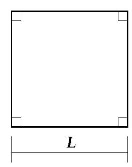
6.8.3.2.4 Perímetro y área de algunas figuras planas

1. **Rectángulo**



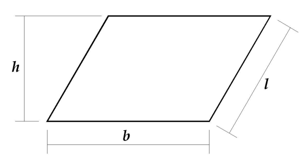
b: base.
h: altura.
Perímetro: $P = 2(b + h)$
Área: $A = bh$

2. **Cuadrado**



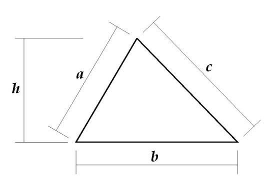
l: lado.
Perímetro: $P = 4l$
Área: $A = l^2$

3. **Romboide**



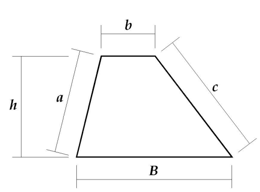
b: base; h: altura.
l: lado adyacente a la base.
Perímetro: $P = 2(b + l)$
Área: $A = bh$

4. **Triángulo**



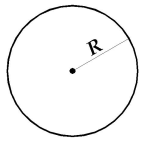
b: base.
h: altura.
a y c: los otros dos lados.
Perímetro: $P = a + b + c$
Área: $A = \frac{1}{2}bh$

5. **Trapecio**



B: base mayor.
b: base menor.
h: altura.
a y c: los otros dos lados.
Perímetro: $P = a + B + b + c$
Área: $A = \frac{1}{2}(B + b)h$

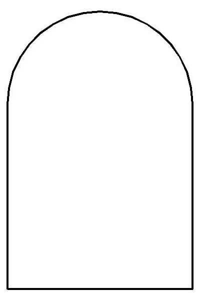
6. Círculo



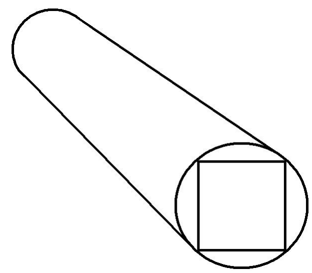
R: radio.
d: diámetro.
Longitud de la Circunferencia:
$C = 2\pi R = \pi d$
Área del Círculo:
$A = \pi R^2$

6.8.3.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Se tiene una ventana compuesta de un cuadrado y un semicírculo en la parte superior, cuyo perímetro es de $8m$, como se muestra en la figura, ¿qué cantidad de vidrio debemos comprar para cubrir la ventana?

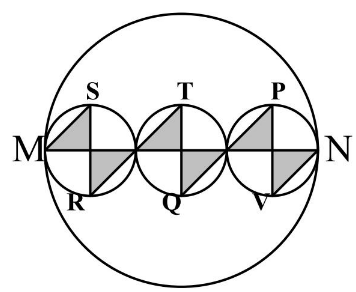


2. La longitud de la circunferencia de un tronco es 62,8 pulgadas. ¿Cuál sería la longitud del lado de una sección transversal de la mayor viga cuadrada que puede recortarse del tronco?



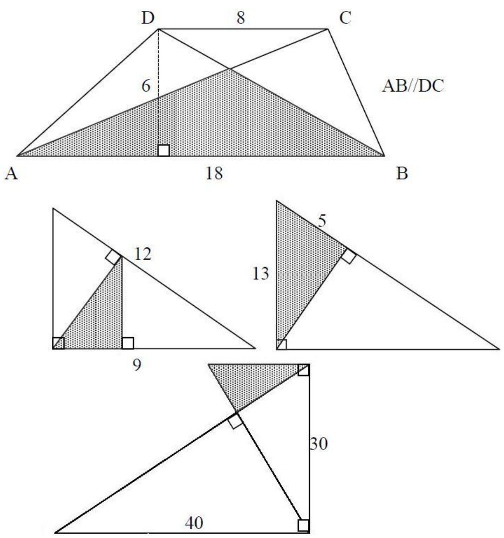
3. Se tienen dos circunferencias concéntricas, el radio de la circunferencia mayor mide el doble que el de la menor. ¿Cuántas veces es más grande el sector circular de la circunferencia mayor respecto a la menor, si el ángulo central común mide $45°$?

4. Si el diámetro $|\overline{MN}|$ es $6cm$, entonces, la suma (en cm^2) de las partes sombreadas es:

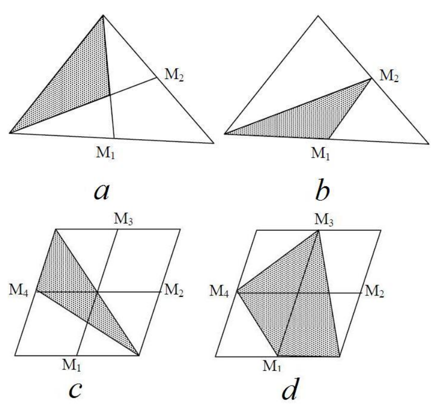


6.8.3.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Calcule el área de la región sombreada:

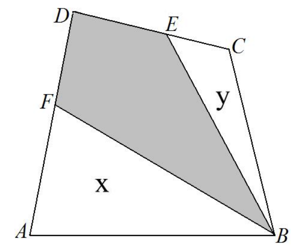


2. Determine el área A de la base de la pirámide sabiendo que el volumen total es de $3600cm^3$:

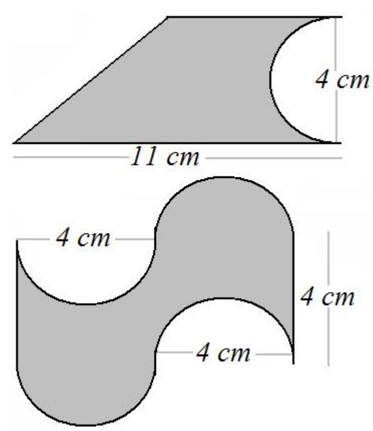


   (a) Área total del triángulo es $24cm^2$, $M1$ y $M2$ punto medio.
   (b) Área total del triángulo es $18cm^2$, $M1$, $M2$ punto medio.
   (c) El paralelogramo de la figura tiene área $36cm^2$, M_i es punto medio.
   (d) El paralelogramo de la figura tiene área $72cm^2$, M_i es punto medio.

3. $ABCD$ cuadrilátero. E y F son puntos medios. Entonces encuentre el área y el perímetro de la parte sombreada:



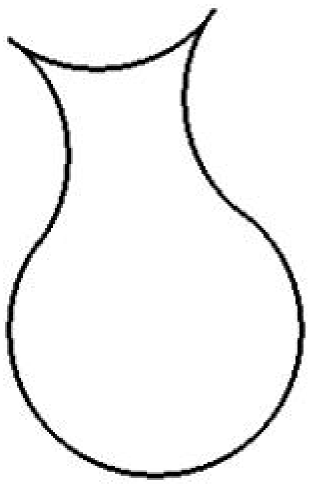
4. Calcule el área y el perímetro de las siguientes figuras:



5. Dibuje dos circunferencias tangentes tales que una de ellas pase por el centro de la otra y calcule el área de la región limitada por éstas, sabiendo que el área del círculo menor es $4cm^2$.

6. Un rectángulo tiene dimensiones $3cm \times 6cm$. Calcule el área y las dimensiones de otro rectángulo semejante a él, sabiendo que la razón entre sus áreas es de $\frac{9}{4}$.

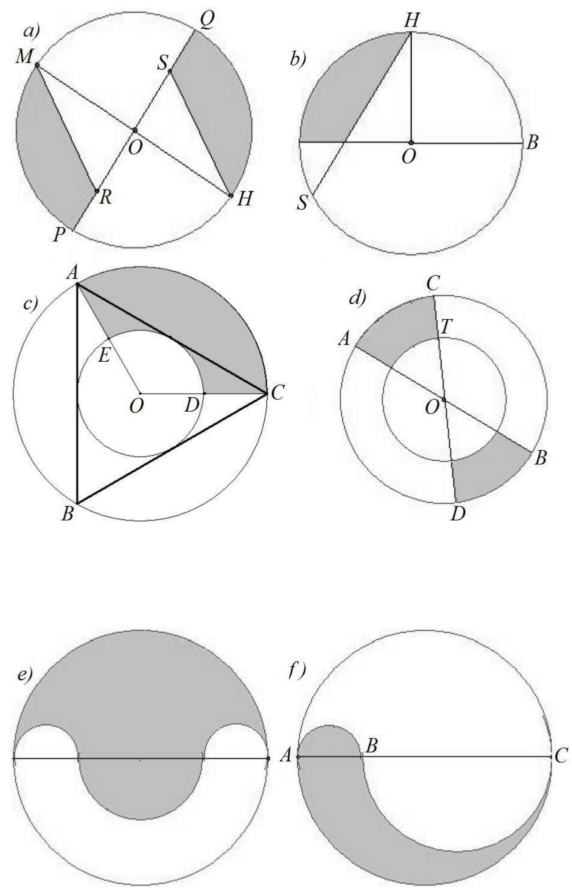
7. Divida la siguiente figura de modo que puedas formar con todos los trozos un cuadrado. Luego calcule el perímetro y el área del jarrón y del cuadrado.



8. En el triángulo ABC, de área 100, M es el punto medio del lado $\overline{AC}$ y P es un punto del lado $\overline{AB}$ tal que el triángulo AMP tiene área 36. La paralela a $\overline{PM}$ trazada por B corta al lado $\overline{AC}$ en Q. Calcule el área del triángulo MPQ.

9. Sea P un punto del lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC. La paralela por P a $\overline{AB}$ corta al lado $\overline{AC}$ en el punto Q y la paralela por P a $\overline{AC}$ corta al lado $\overline{AB}$ en el punto R. La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2. Determine la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC.

10. Encuentre el área y el perímetro para cada una de las siguientes figuras, de acuerdo con la información dada:



(a) Considere la siguiente figura. En la circunferencia de centro O, si $\overline{MH} \perp \overline{PQ}$, $\overline{MR} \cong \overline{SH}$, $|\overline{RO}| = 7$ y $|\overline{MH}| = 20$.

(b) De acuerdo con los datos de la figura, si $|\overline{AB}|$ es un diámetro de medida $4\sqrt{3}$ y $m(\angle OHS) = 30°$

(c) O es el centro de la cincunferencia, $\triangle ABC$ es equilátero, $|\overline{OC}| = 16$ y $|\overline{AE}| = 9$.

(d) De acuerdo con los datos de la figura, si O es centro de los círculos, $|\overline{CD}| = 18$, $m(\angle DOB) = 80$ y $|\overline{CT}| = 4$

(e) $D = 12$, $d = 4$

(f) Si $|\overline{BC}| = 3|\overline{AB}|$ y $|\overline{AB}| = 5$

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Volumen y Área Superficial de Sólidos

6.8.4 Volumen y área superficial de sólidos

6.8.4.1 Objetivo de aprendizaje

- Clasificar y enunciar propiedades de los principales cuerpos geométricos (sólidos regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos).
- Plantear y resolver problemas empleando elementos de la geometría del espacio.
- Comprender y utilizar las fórmulas de volúmenes y área superficial de los cuerpos geométricos, de tal forma que puedan ser aplicados en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

6.8.4.2 Matemática formal

A diferencia de la *Geometría plana*, o de dos dimensiones, que estudia las figuras cuyas partes están todas en un mismo plano, la *Geometría del espacio*, o de tres dimensiones, trata de las propiedades de las figuras cuyas partes no están todas en un mismo plano. [1]

Definición 6.8.32 **Cuerpo geométrico** *es toda porción limitada del espacio, esté o no ocupada por materia, pues, en los cuerpos geométricos sólo se atiende a la forma y se hace abstracción de la materia. Así, por ejemplo, un agujero es un cuerpo geométrico aunque esté vacío de la materia que lo rodea.*

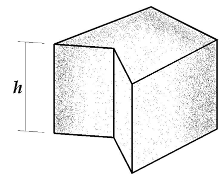
Los sólidos o cuerpos geométricos se pueden clasificar en: poliedros y cuerpos redondos.

Definición 6.8.33 *Un* **poliedro** *es un sólido limitado por planos, y las intersecciones de estos planos forman polígonos llamados caras del poliedro; y un* **cuerpo redondo** *es un sólido que tiene al menos una cara curva.*

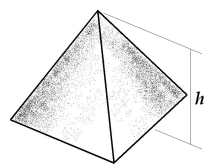
[1] Definiciones y teoría retomada del texto "Curso de geometría" de F.J. Landaverde.

Los poliedros se clasifican en prismas y pirámides.

Definición 6.8.34 *Un* **prisma** *es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las demás caras son paralelogramos.*



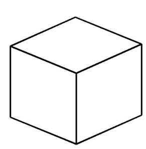
Definición 6.8.35 *Una* **pirámide** *es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y por caras laterales tres o más triángulos que tienen un vértice común.*



Definición 6.8.36 *El* **volumen** *de un sólido es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo y se mide en unidades cúbicas.*

Definición 6.8.37 *En el área de la superficie de los cuerpos geométricos suele emplearse tan sólo la palabra área, pero siempre se sobrentiende la expresión completa:* **Área de la superficie** *de estos cuerpos.*

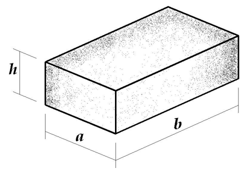
Definición 6.8.38 (Unidad cúbica) *Es un cubo en el cual cada lado (arista) mide una unidad de longitud. Se usan entre otras el "centímetro cúbico" (cm^3), la cual corresponde a un cubo que mide $1cm$ por cada lado. "Milímetro cúbico" (mm^3) es un cubo en el que cada lado mide $1mm$.*



Unidad cúbica

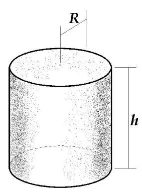
6.8.4.2.1 Volumen y área superficial de algunos sólidos

Definición 6.8.39 **Paralelepípedo** *es un prisma cuyas bases son paralelogramos; por tanto, sus seis caras son paralelogramos.*



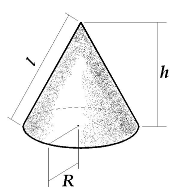
a: ancho.
b: largo.
h: altura.
Volumen: $V = abh$
Área Superficial:
$A = 2ab + 2ah + 2bh$

Definición 6.8.40 Cilindro circular recto: *Es un cuerpo redondo limitado por dos círculos congruentes y paralelos llamados bases del cilindro, y por una cara curva que al abrirse es un rectángulo en el cual un lado es la longitud de la circunferencia que encierra el círculo y el otro es la altura del cilindro. Cualquier sección transversal es un círculo paralelo y congruente a las bases.*



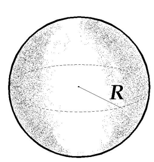
r: radio de la base.
h: altura.
Volumen: $V = \pi r^2 h$
Área Superficial:
$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Definición 6.8.41 Cono circular recto: *Es un cuerpo redondo que tiene como base un círculo y su superficie lateral se obtiene al unir un punto exterior, llamado vértice del cono, con cada punto de la circunferencia por medio de segmentos de recta. La recta que contiene cada uno de estos segmentos se llama generatriz del cono.*



r: radio de la base.
h: altura.
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Área Superficial:
$A = \pi rl + \pi r^2$

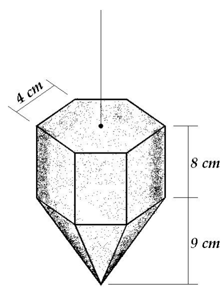
Definición 6.8.42 Esfera: *Es el sólido limitado por la línea cerrada formada por todos los puntos del espacio que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado centro. A la distancia fija la llamamos radio de la esfera y la denotamos r:*



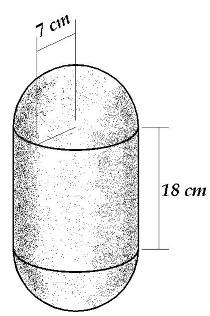
r: radio.
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Área Superficial: $A = 4\pi r^2$

6.8.4.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

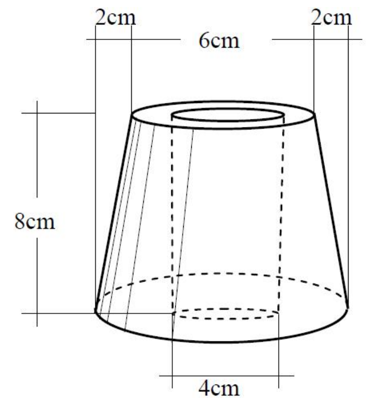
1. Se va a construir en cemento el sólido que se muestra en la figura, compuesto por un cilindro circular recto de $18cm$ de altura y $7cm$ de radio con 2 semiesferas en sus extremos. ¿Cuánto cemento se requiere para la construcción del sólido? Si se quiere proteger el sólido con una lámina de acrílico, ¿qué cantidad de acrílico se necesita?.



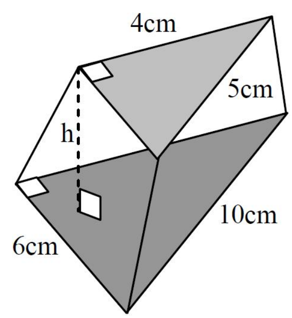
2. Se va a construir en cemento el sólido que se muestra en la figura, compuesto por un cilindro circular recto de $18cm$ de altura y $7cm$ de radio con 2 semiesferas en sus extremos. ¿Cuánto cemento se requiere para la construcción del sólido? Si se quiere proteger el sólido con una lámina de acrílico, ¿qué cantidad de acrílico se necesita?.



3. Halle el volumen y el área superficial del siguiente sólido compuesto:

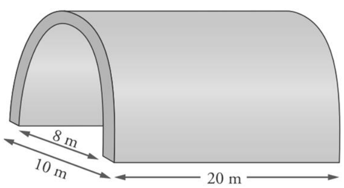


4. Determine el volumen del tronco de pirámide de la figura, cuya altura es $h = 3cm$. La base es un triángulo.



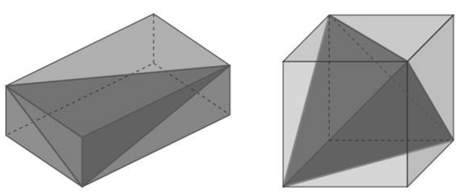
6.8.4.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Calcule el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:



2. Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide $15cm$. La altura de la columna es de $2,95m$. Halle su peso y área superficial sabiendo que $1m$ de basalto pesa $2845kg$.

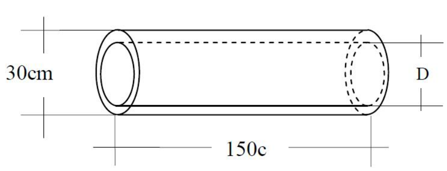
3. ¿Qué porción de la caja ocupa cada uno de los siguientes tetraedros?



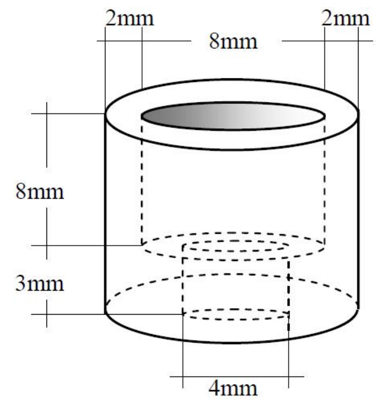
4. Determine el diámetro interior D del tubo de modo tal que el material que se utilice para construirlo sea:

   (a) $80.000cm^3$

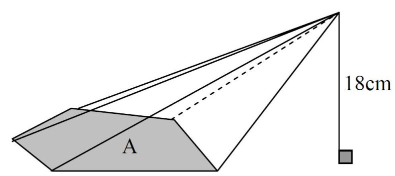
   (b) $160.000cm^3$



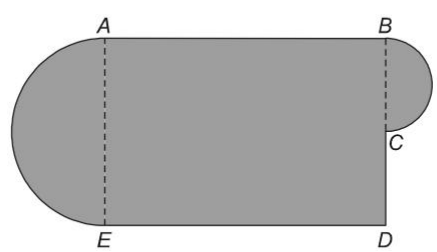
5. Halle el volumen y área superficial del siguiente sólido compuesto:



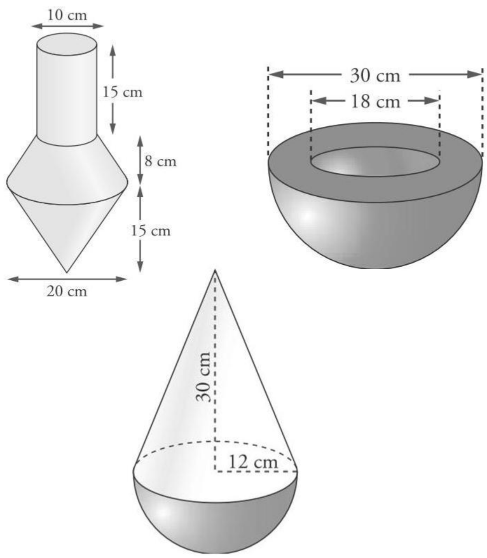
6. Determine el área A de la base de la pirámide sabiendo que el volumen total es de $3600cm^3$:



7. Calcule el máximo volumen, en metros cúbicos, que puede tener una piscina cuya base tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura, siendo la profundidad constante e igual a 1,6 metros:



8. Halle el volumen y el área superficial de cada uno de los siguientes solidos:



9. Halle el volumen y el área superficial de las siguientes figuras:

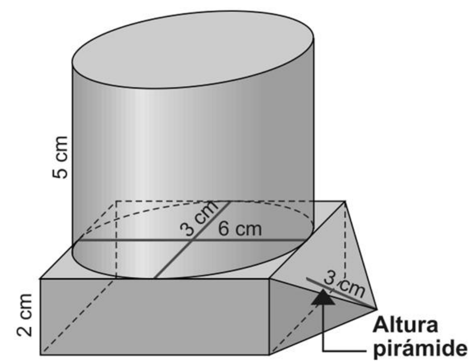
   (a) Un prisma de $7cm$ de altura, cuyas bases son rombos de diagonales $6cm$ y $4cm$.

   (b) Un cilindro de $5cm$ de altura, cuyo radio de la base mide $2cm$.

   (c) Un cono con $2cm$ de radio de la base y $5cm$ de altura.

   (d) Un prisma de base cuadrada, de $6cm$ de altura, cuyo lado de la base mide $3cm$.

10. Halle el volumen y el área superficial total de la siguiente figura:



Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Ángulos

6.8.5 Trigonometría: ángulos

6.8.5.1 Objetivo de aprendizaje

- Identificar los conceptos básicos de la trigonometría plana, especialmente los diferentes sistemas de medición de ángulos.
- Establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con las medidas de sus ángulos, de manera que resulte posible comprender el concepto de razón trigonométrica y sus definiciones.

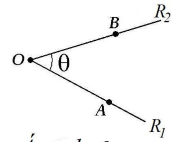
6.8.5.2 Matemática formal

La *Trigonometría* es el estudio de la relación entre las medidas de los lados y los ángulos del triángulo.

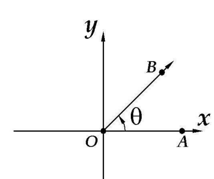
6.8.5.2.1 Ángulos

Un *ángulo* AOB, consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O. A menudo, se interpreta un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 se llama el *lado inicial* y R_2 se llama el *lado terminal* del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se considera *positivo* al ángulo, y si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, se considera que el ángulo es *negativo*.

Definición 6.8.43 *Un ángulo está en posición estándar si se dibuja en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje x positivo.*



Ángulo θ



Posición Estándar

6.8.5.2.2 Medida de ángulos

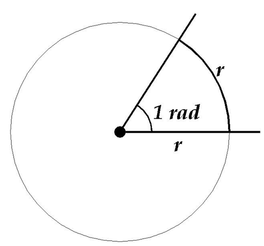
6.8.5.2.2.1 Grado

Definición 6.8.44 *La* **medida** *de un ángulo es la cantidad de rotación respecto al vértice requerida para mover R_1 sobre R_2. De manera intuitiva, esto es cuánto se "abre" el ángulo. Los ángulos se miden en grados o en radianes.*

Si se divide la longitud L de una circunferencia por su diámetro, el resultado es la constante π, es decir, $\frac{L}{d} = \frac{L}{2r} = \pi$, por ello $L = 2\pi r$.

6.8.5.2.2.2 Radianes

Definición 6.8.45 *Un* **radián**, *denotado $1rad$, es la medida del ángulo formado por dos rayos que se intersectan en el centro de una circunferencia de radio r, de tal forma que el arco sobre la circunferencia que se encuentra entre los dos rayos tiene longitud r.*



6.8.5.2.2.3 Relación entre grados y radianes

Podemos expresar la medida de un ángulo en radianes o en grados. A partir de la equivalencia:

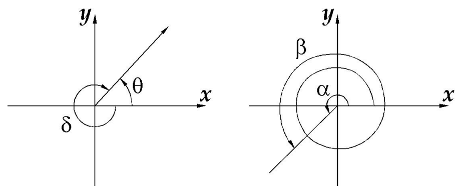
$$2\pi rad \Longleftrightarrow 360°$$

encontramos que:

$$1rad \Longleftrightarrow \frac{180°}{\pi}$$
$$1° \Longleftrightarrow \frac{\pi}{180} rad$$

6.8.5.2.3 Ángulos coterminales

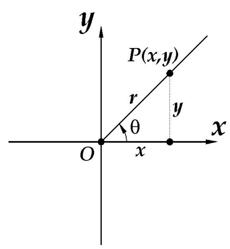
Definición 6.8.46 *Dos ángulos en posición estándar son* **coterminales** *si sus lados terminales coinciden.*



Si θ es un ángulo en posición estándar, θ y $\theta + 360°n$, con $n \in \mathbb{Z}$, son ángulos coterminales.

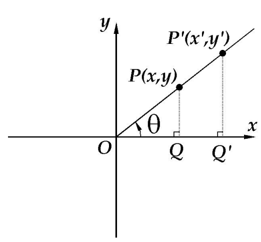
6.8.5.2.4 Funciones trigonométricas de ángulos

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P = (x, y)$ un punto sobre el lado terminal de θ, distinto del origen. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto P, definimos las funciones trigonométricas de θ así:



$$sen\theta = \frac{y}{r};\ cos\theta = \frac{x}{r},\ tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0),$$
$$cot\theta = \frac{x}{y}(y \neq 0);\ sec\theta = \frac{r}{x}(x \neq 0);\ csc\theta = \frac{r}{y}(y \neq 0).$$

Es importante anotar que las funciones trigonométricas de un ángulo **no** dependen de la elección del punto $P = (x, y)$. Si $P' = (x', y')$ es cualquier otro punto sobre el lado terminal del ángulo, como los triángulos $\triangle POQ$ y $\triangle P'OQ'$ son semejantes (¿por qué?), sus lados correspondientes son proporcionales.

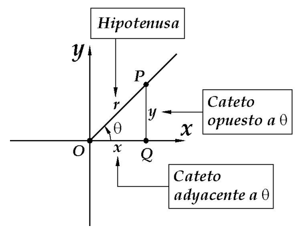


$$Si \quad r' = d(0, P'),\ \implies,\ \frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} = sen\theta;\ \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = cos\theta;\ \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = tan\theta$$

En forma similar se obtiene el resultado para las tres funciones restantes.

Observación

Sea θ un ángulo agudo en posición estándar y sea $P = (x, y)$ un punto sobre el lado terminal de θ.



El $\triangle OQP$ es rectángulo en Q, la hipotenusa es el segmento $|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los catetos son los segmentos $\overline{OQ}$ llamado cateto adyacente a θ, y $\overline{QP}$ llamado cateto opuesto a θ, de longitudes x e y respectivamente.

Con base en este triángulo y en la definición de las funciones trigonométricas de ángulos tenemos:

$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}, cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}, tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

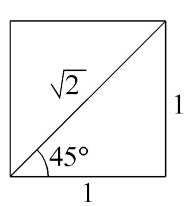
$$cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}, sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}, csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$$

Y de esta forma podemos calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Hallemos las funciones trigonométricas de los ángulos $\theta = 45°$ ó $\frac{\pi}{4}$, $\theta = 60°$ ó $\frac{\pi}{3}$, $\theta = 30°$ ó $\frac{\pi}{6}$.

Para $\theta = 45°$

Dibujamos un cuadrado de lado 1 y trazamos una diagonal cuya longitud, usando el *Teorema de Pitágoras*, es $\sqrt{2}$. Los ángulos agudos de cada uno de los triángulos que se forman son de $45°$

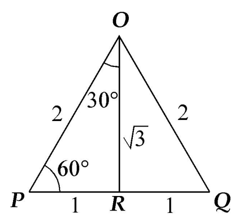


Entonces, las funciones trigonométricas de $\theta = 45°$ ó $\frac{\pi}{4}$ son:

$$sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos45°, tan45° = 1 = cot45°, sec45° = \sqrt{2} = csc45°.$$

Para $\theta = 60°$

Dibujamos un triángulo equilátero $\triangle OPQ$ de lado 2 y trazamos la altura relativa a uno de sus lados. Como la altura es también mediana, la longitud de $\overline{PR}$ es 1 y usando el *Teorema de Pitágoras* encontramos que la longitud de la altura es $\sqrt{3}$.



Como cada uno de los ángulos interiores del triángulo mide $60°$, con base en la información anterior, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 60°$ o $\frac{\pi}{3}$

$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, cos60° = \frac{1}{2}, tan60° = \sqrt{3}, cot60° = \frac{\sqrt{3}}{3}, sec60° = 2, csc60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Para $\theta = 30°$

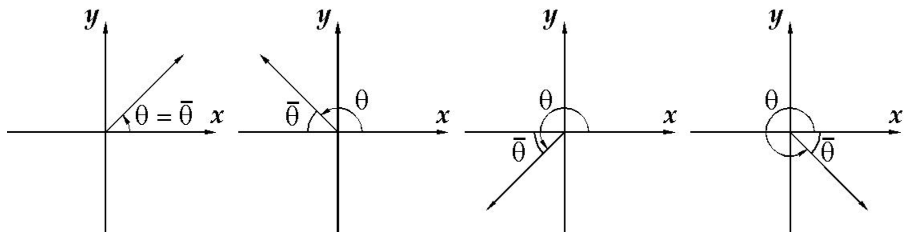
Usando el mismo triángulo y el hecho que la altura es también bisectriz, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 30°$ o $\frac{\pi}{6}$

$$sen30° = \frac{1}{2}, cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, tan30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, cot30° = \sqrt{3}, sec30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}, csc30° = 2.$$

Las funciones trigonométricas de ángulos mayores de $90°$, se hallan con base en las de los ángulos agudos.

6.8.5.2.5 Ángulo de referencia

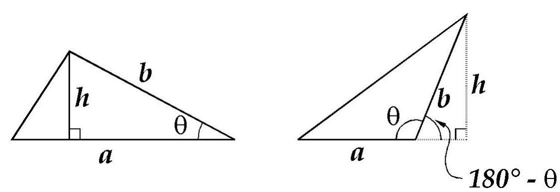
El *ángulo de referencia* $\overline{\theta}$ de un ángulo θ en posición estándar, es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.



$\bar{\theta} = \theta$ $\qquad$ $\bar{\theta} = \pi - \theta$ $\qquad$ $\bar{\theta} = \theta - \pi$ $\qquad$ $\bar{\theta} = 2\pi - \theta$

6.8.5.2.6 Aplicación en área de un triángulo

Sabemos que el área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}\left(base \times altura\right)$. Ahora, consideremos los siguientes triángulos:



(a) $\qquad$ (b)

Supongamos que, en cada caso, conocemos a, b y θ. Luego, para hallar el área, necesitamos la altura h.

- En (a), es claro que $sen\theta = \frac{h}{b} \Longrightarrow h = b\ sen\theta$. Luego, $A = \frac{1}{2}ab\ sen\theta$.

- En (b), tenemos $sen\left(180° - \theta\right) = \frac{h}{b}$ y, como éste es el ángulo de referencia de θ, entonces, $sen\theta = sen\left(180° - \theta\right)$. Luego, $h = b\ sen\theta$ y, así, $A = \frac{1}{2}ab\ sen\theta$.

Luego, si a y b son las longitudes de dos lados de un triángulo y θ es el ángulo entre ellos entonces el área A del triángulo es:

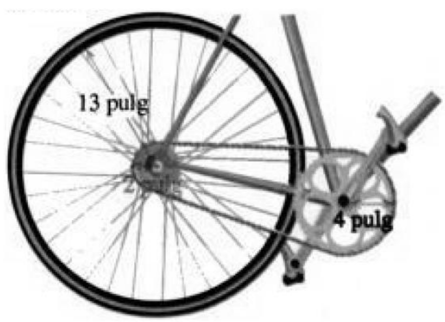
$$A = \frac{1}{2}ab\ sen\theta.$$

6.8.5.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

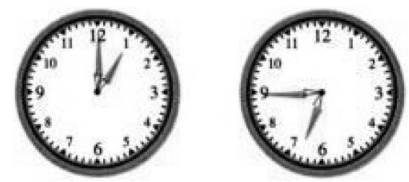
1. En la figura se muestran las coronas dentadas y la cadena de una bicicleta. La corona dentada de los pedales tiene un radio de 4 *pulg*, la corona dentada de la rueda tiene un radio de 2 *pulg* y la rueda tiene un radio de 13 *pulg*. El ciclista pedalea a 40 *rpm*.

   (a) Encuentre la velocidad angular de la corona dentada de la rueda.

   (b) Determine la velocidad de la bicicleta. (Suponga que la rueda gira a la misma velocidad que la corona dentada de la rueda.)



2. En una hora, el minutero de un reloj recorre un círculo completo y la manecilla que marca la hora se mueve $\frac{1}{2}$ de un círculo. ¿Cuántos radianes se mueven el minutero y el horario entre la 1:00 P.M. y las 6:45 P.M. (en el mismo día)?



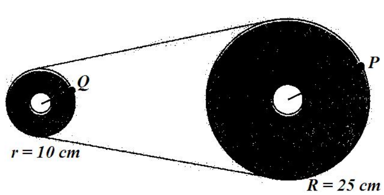
3. Encuentre el ángulo entre $0°$ y $360°$ que es coterminal con el ángulo dado:

   (a) $733°$
   (b) $1110°$
   (c) $-800°$
   (d) $361°$
   (e) $-100°$
   (f) $1270°$

4. La rueda de un vehículo tiene un diámetro de $90cm$. ¿Cuántas vueltas da aproximadamente por minuto cuando viaja a $120km/h$?

6.8.5.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro, de ida y vuelta, de $60°$. Si el chorro de agua alcanza $16m$, halle el área A de la superficie de césped regada.



2. Encuentre el ángulo entre 0 y 2π que es coterminal con el ángulo dado.

   (a) $\frac{17\pi}{6}$
   (b) 10
   (c) $-\frac{7\pi}{3}$
   (d) $\frac{17\pi}{4}$
   (e) 87π
   (f) $\frac{51\pi}{2}$

3. En un *sprint* los ciclistas alcanzan una velocidad de $20m/s$ $(72km/h)$. ¿Cuál es la

velocidad angular de las ruedas, es decir, cuántos grados gira por segundo? (Radio de las ruedas $= 35cm$).

4. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las cuatro y media en punto? ¿Y a las 10:20 horas?

5. Halle el radio r de una rueda que gira 300 vueltas por minuto impulsada por una correa que se mueve a $45m/s$.

6. Una polea con diámetro de $36cm$ gira con una banda que se desplaza a una velocidad de $5m/s$. ¿Cuántas revoluciones por segundo efectúa la polea?

7. Un neumático tiene un diámetro de $36pulg$. ¿Cuántas revoluciones efectuará la rueda cuando el automóvil recorra una milla $(5280pie)$?

8. Determine el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes:

   (a) $\cos 120°$

   (b) $\cot \frac{-2\pi}{3}$

9. Realice los cálculos de los ángulos de referencia para cada uno de los siguientes ángulos:

   (a) $\theta_1 = -\frac{5}{3}\pi$

   (b) $\theta_2 = -150°$

   (c) $\theta_3 = -202.4°$

   (d) $\theta_4 = -7.36°$

   (e) $\theta_5 = \frac{2}{3}\pi$

   (f) $\theta_6 = 225°$

   (g) $\theta_6 = 5.25°$

   (h) $\theta_6 = 432°$

10. Una mujer va en una bicicleta cuyas ruedas tienen 26 pulgadas de diámetro. Si las ruedas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que está viajando, en $millas/h$.

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Aplicaciones de Trigonometría

6.8.6 Aplicaciones de la trigonometría en triángulos rectángulos

6.8.6.1 Objetivo de aprendizaje

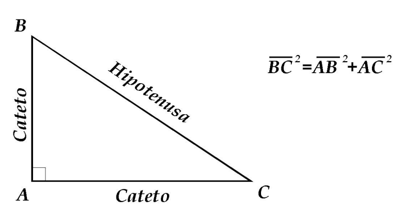
- Resolver problemas topográficos y del mundo físico cuyo modelo matemático implique aplicar las distintas relaciones trigonométricas (razones trigonométricas, Teorema de Pitágoras, ley del seno y del coseno).

6.8.6.2 Matemática formal

Un triángulo tiene seis elementos: tres ángulos y tres lados. *Resolver un triángulo* significa hallar la medida de todos sus elementos a partir de la información que se tenga acerca del triángulo.

6.8.6.2.1 Teorema de Pitágoras

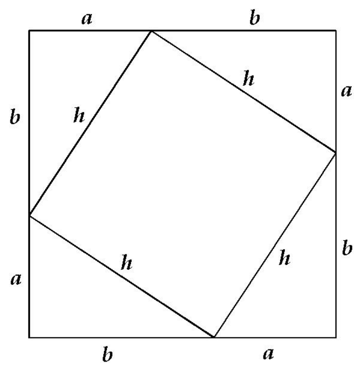
Si ΔABC es un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



Prueba

Sea h la medida de la hipotenusa, es decir, de $\overline{BC}$, y a, b las medidas de los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del ΔABC.

Construyamos un cuadrado cuyos lados tienen longitud $a + b$, así:



Área del cuadrado de lado $a + b : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

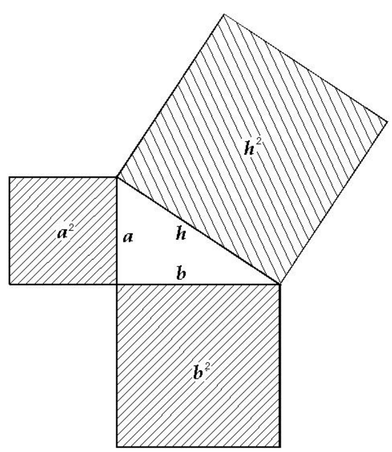
Área del cuadrado de lado $h : h^2$

Área de los cuatro triángulos cuyos catetos son a y $b : 4\frac{ab}{2} = 2ab$

Luego, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + h^2$

Y así, $h^2 = a^2 + b^2$

El *Teorema de Pitágoras* se puede interpretar geométricamente diciendo que el área del cuadrado construido teniendo la hipotenusa como lado, es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de los cuadrados construidos teniendo como lado cada uno de los catetos.



Esta afirmación es válida si en vez de cuadrados, sobre los lados del triángulo se construyen figuras proporcionales.

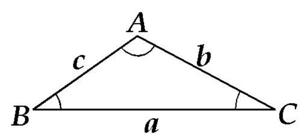
6.8.6.2.2 Ley del seno y ley del coseno

Para resolver un triángulo, es necesario conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para decidir si se tiene información suficiente, con frecuencia es útil hacer un bosquejo. Por ejemplo, si se dan dos ángulos y el lado incluido, entonces es claro que sólo se puede formar un triángulo. De manera similar, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces está determinado un solo triángulo. Pero si se conocen los tres ángulos y ninguno de los lados, no se puede determinar de manera única el triángulo porque muchos tienen los mismos tres ángulos.

Vamos a estudiar dos nuevas herramientas, llamadas *Ley de Seno* y *Ley de Coseno*, que expresan ciertas relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera.

6.8.6.2.2.1 Ley del Seno

En cualquier triángulo ABC

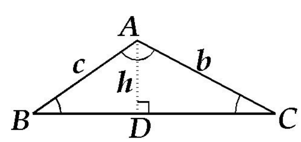


$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}.$$

Es decir, en todo triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y la medida del lado opuesto es constante.

Prueba

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sea h la altura sobre el lado $\overline{BC}$ y D el pie de dicha altura, es decir, el punto de intersección de la altura con el lado $\overline{BC}$



Como el $\triangle BDA$ es rectángulo,

$$sen\ B = \frac{h}{c}, \text{o equivalentemente, } h = c\ sen\ B.$$

Además, como el $\triangle ADC$ es rectángulo,

$$sen\ C = \frac{h}{b}, \text{o } h = b\ sen\ C,$$

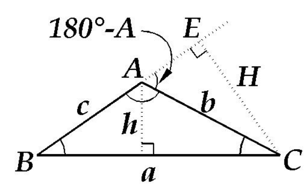
y así

$$csen\ B = h = b\ sen\ C.$$

Luego,

$$\frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c} \tag{6.2}$$

Tracemos la altura H sobre el lado $\overline{BA}$ y sea E el pie de dicha altura.



Como $\triangle AEC$ es rectángulo.

$$sen\ (180° - A) = \frac{H}{b} \Longleftrightarrow H = b\ sen\ (180° - A) = b\ sen\ A$$

ya que $180° - A$ es el ángulo de referencia del ángulo A. Además,

$$H = a\ sen\ B$$

y así

$$b\ sen\ A = H = a\ sen\ B.$$

Entonces

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} \tag{6.3}$$

De (6.2) y (6.3) tenemos que:

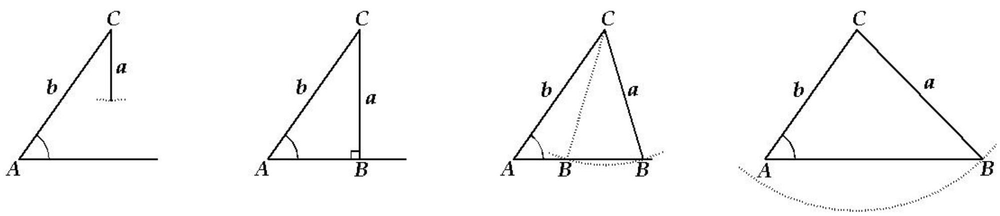
$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}$$

Observaciones

Si en un triángulo conocemos un lado y dos ángulos, o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, podemos usar la *Ley de Seno* para resolver el triángulo.

- En el primer caso, conocidos un lado y dos ángulos, el tercer ángulo se calcula usando el hecho que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$. Para hallar cada uno de los otros dos lados, aplicamos la *Ley de Seno* usando la proporción entre la razón que involucra el lado conocido y la que involucra el lado que queremos hallar. En este caso existe un único triángulo que cumple las condiciones dadas.
- En el segundo, si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se usa la *Ley de Seno* para hallar el ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, luego se halla el tercer ángulo y finalmente el tercer lado se calcula usando nuevamente la *Ley de Seno*.

En este caso puede ocurrir que dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo cumplan las condiciones dadas, razón por la cual se conoce como el caso ambiguo. Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la figura:

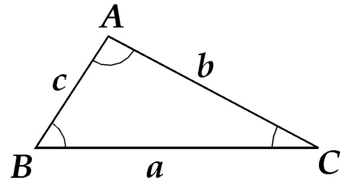


(a) (b) (c) (d)

En el caso (a), no existe un triángulo con las condiciones dadas, porque la longitud del lado a es menor que la requerida para formar un triángulo que las cumpla. En (b), se obtiene un triángulo rectángulo que se resuelve más fácilmente usando el *Teorema de Pitágoras* y la definición de las funciones trigonométricas. En (c), existen dos triángulos que cumplen las condiciones y por tanto hay dos soluciones posibles y, en (d), la solución es única.

6.8.6.2.2.2 Ley del Coseno

En cualquier triángulo ABC

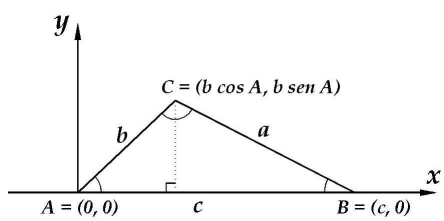


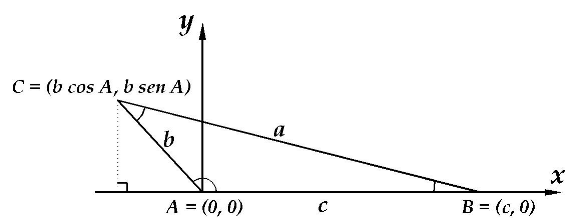
$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C.
\end{aligned}
$$

Es decir, en cualquier triángulo, el cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de la longitud de estos dos lados y del coseno del ángulo entre ellos.

Prueba

Dibujemos el $\triangle ABC$ en el plano cartesiano xy con el $\angle A$ en posición estándar.





Tanto si el ángulo A es agudo, como si es obtuso, las coordenadas del vértice B son $(c, 0)$ y, las coordenadas del vértice C son $(b\ cosA, b\ senA)$.

Como $a = d(B, C)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= [d(B,C)]^2 \\
a^2 &= (b\ cosA - c)^2 + (b\ senA - 0)^2 \\
a^2 &= b^2\ cos^2A - 2bc\ cosA + c^2 + b^2\ sen^2A \\
a^2 &= b^2(cos^2A +\ sen^2A) - 2bc\ cosA + c^2 \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \text{ porque } cos^2A +\ sen^2A = 1.
\end{aligned}
$$

Más adelante veremos que para cualquier ángulo A se cumple que $sen^2A +\ cos^2A = 1$.

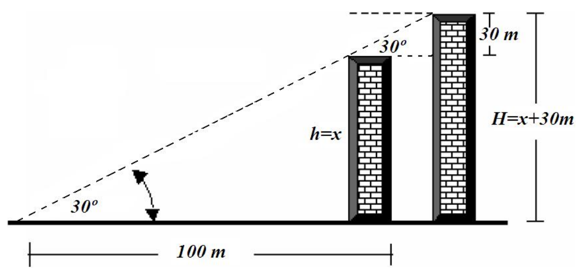
En forma similar se prueba el resultado para los otros dos lados b y c.

Observación

Si alguno de los ángulos del triángulo es recto, por ejemplo $A = 90°$, entonces $cosA = 0$ y la *Ley de Coseno* es equivalente al Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$.

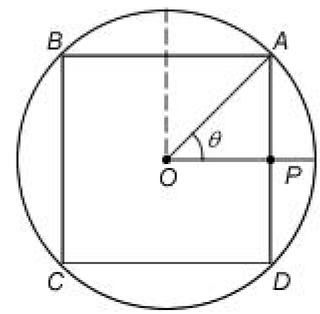
6.8.6.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Una chimenea tiene $30m$ de altura más que otra. Un observador que está a $100m$ de distancia de la más baja observa que sus cúspides están en una recta inclinada respecto al horizonte con un ángulo de $30°$; halle las alturas de las chimeneas.



2. Desde la cima de una montaña de $3000m$ de altura, se observa un avión con un ángulo de elevación de $30°$, en ese mismo instante, el avión está justo encima de un árbol que está a 500 metros del pie de la montaña. Si la ladera de la montaña mide 5.000 metros, ¿a qué altura en metros está el avión?

3. El perímetro del rectángulo inscrito en el círculo mostrado en la figura es $4r\sqrt{2}$, donde r es el radio de la circunferencia. El valor de θ es:



4. Dos automóviles parten de la intersección de dos carreteras rectas, y viajan a lo largo de ellas a una velocidad de 55 millas por hora y 65 millas por hora, respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras mide $72°$, ¿qué tan separados están los automóviles después de 36 minutos?

6.8.6.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Desde un punto A que está a $8m$ sobre el nivel del suelo el ángulo de elevación a la parte más alta de un inmueble es $35°$ y el ángulo de depresión a la base del mismo es $15°$, ¿cuál es la altura del edificio?

2. Las boyas A, B y C marcan los vértices de una pista triangular de carreras en un lago. Las boyas A y B, distan $4200pies$, las boyas A y C distan $3800pies$ y el ángulo CAB mide $100°$. Si la lancha ganadora de la carrera recorrió la pista en $6,4$ segundos, ¿cuál fue su promedio en millas por hora?

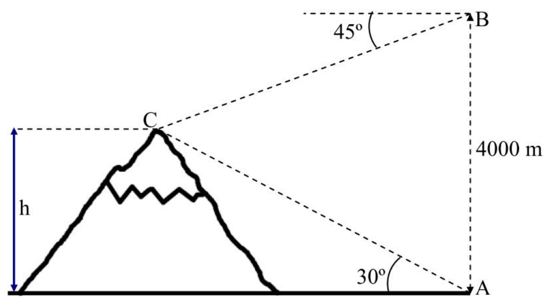
3. Un trotador corre a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección $S\ 40°\ E$ durante 20 minutos y luego en dirección $N\ 20°\ E$ durante los siguientes 16 minutos. Calcule la distancia desde el punto final al punto de partida.

4. Un jardín triangular tiene lados que miden 42, 50 y $63m$. Encuentre la medida del ángulo menor.

5. Un camino recto hace un ángulo de $15°$ con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del sol es de $57°$, un poste vertical que está a un lado del camino, proyecta una sombra de $75pies$ de largo, directamente cuesta abajo.

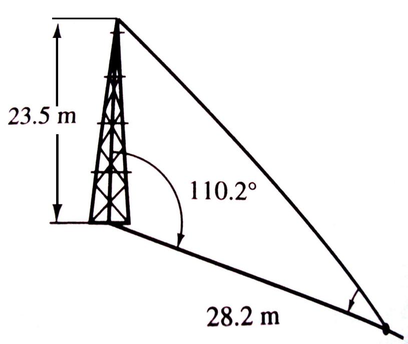
Calcule la longitud del poste.

6. Halle la altura de la montaña:

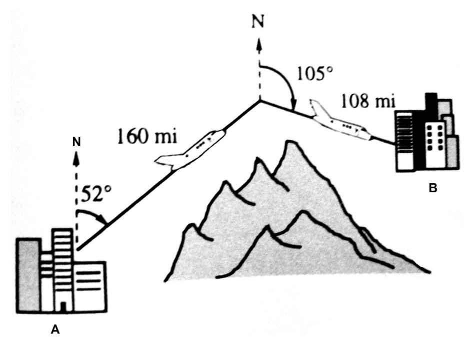


7. En la cima de una colina hay un asta de bandera. Desde un punto A, en el terreno llano, los ángulos de elevación del extremo D y del pie B del asta miden, respectivamente, $47°54'$ y $39°45'$. Determine la altura de la colina si el asta mide $11,55m$.

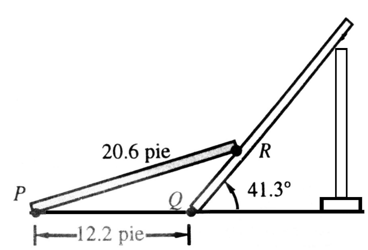
8. Una torre de $23,5m$ de altura forma un ángulo de $110.2°$ con el camino inclinado sobre el cual se ubica. Determine el ángulo subtendido por la torre en un punto situado camino abajo a $28,2m$ de su base (como lo indica la figura).



9. Un piloto que vuela de la ciudad A a la ciudad B debe sobrevolar una cordillera montañosa particular. El piloto primero vuela con un curso de $52°$ una distancia de $160mi$ y después cambia el curso a $105°$ y llega a B después de volar otras $108mi$ (como lo indica la figura). ¿Cuál es la distancia directa de A a B?



10. Una rampa está inclinada a un ángulo de $41.3°$ con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de $20,6pie$ de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a $12,2pie$ de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R.



Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Circunferencia unitaria

6.8.7 Funciones trigonométricas de números reales

6.8.7.1 Objetivo de aprendizaje

- Conocer las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) y las secundarias (cotangente, secante y cosecante), saber representarlas en el plano cartesiano y verificar su naturaleza periódica.

6.8.7.2 Matemática formal

Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas, pero equivalentes: como funciones de ángulos o funciones de números reales. Hay seis funciones trigonométricas, cada una con propiedades especiales. En esta guía estudiaremos sus definiciones, gráficas y aplicaciones.

6.8.7.2.1 Circunferencia unitaria

El conjunto de puntos a una distancia de 1 a partir del origen es una circunferencia de radio 1. La *circunferencia unitaria* es la que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

6.8.7.2.2 Función periódica

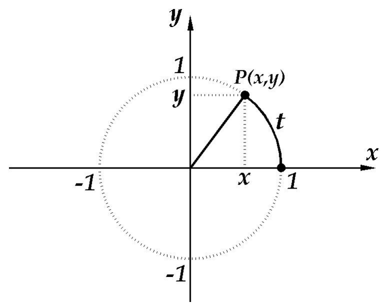
Se dice que una función f es *periódica* si existe un número positivo p tal que $f\,(t + p) = f\,(t)$ para todo $t \in D_{f.}$. El menor de los números p que cumple la condición se llama *período* de f.

Si f tiene período p, se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es un período completo de f.

6.8.7.2.3 Funciones trigonométricas de números reales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. Ahora, utilizando las propiedades de la circunferencia unitaria se definirán las funciones trigonométricas:

En la circunferencia unitaria consideremos un ángulo en posición estándar cuya medida en radianes es t, con $t \in \mathbb{R}$.



Si $P = (x, y)$ es el punto en el que el lado terminal del ángulo t interseca la circunferencia unitaria, las funciones trigonométricas de t son:

$$\begin{aligned} sent &= y, \ cost = x, \\ \tan t &= \frac{y}{x} \ (x \neq 0), \cot t = \frac{x}{y} \ (y \neq 0), \\ \sec t &= \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \csc t = \frac{1}{y} \ (y \neq 0). \end{aligned}$$

Esta forma de presentar las funciones trigonométricas permite analizar su variación a medida que t cambia, es decir, a medida que $P = (x, y)$ recorre la circunferencia unitaria.

6.8.7.2.4 Función seno

Para determinar cómo es la variación de $sen\ t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, analizamos cómo cambia la ordenada y del punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, al variar t, ya que $sen\ t = y$.

La variación puede resumirse en la siguiente tabla:

t	$y = sent$
$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \longrightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$1 \longrightarrow 0$
$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \longrightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$-1 \longrightarrow 0$

Interpretación: La tabla muestra los valores de la función seno en la medida que se dan valores reales para las abscisas t. Por ejemplo, en la fila uno muestra que si partimos de 0 y nos vamos acercando a $\frac{\pi}{2}$, los resultados de la función parten de 0 y se acercan cada vez más a 1. Esto se puede corroborar en la gráfica de la función.

Cuando t varía en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$, el punto $P = (x, y)$ recorre nuevamente la circunferencia unitaria de la misma forma como lo hizo en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir,

$$sen\,(t + 2\pi) = sen\ t$$

Si $P = (x, y)$ se mueve en el intervalo $[4\pi, 6\pi]$ y en los siguientes intervalos de longitud 2π, el comportamiento de y es el mismo y, en consecuencia:

$$sen\ (t + 2n\pi) = sen\ t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \ \mathbb{Z}.$$

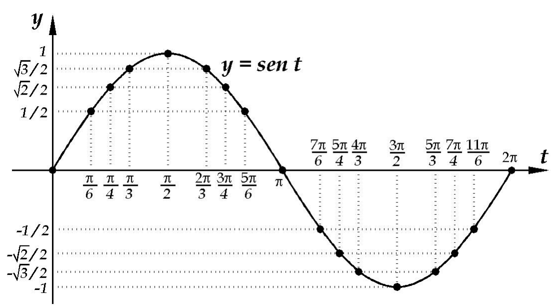
Luego la función seno es una *función periódica* de período 2π.

6.8.7.2.4.1 Gráfica de la función seno

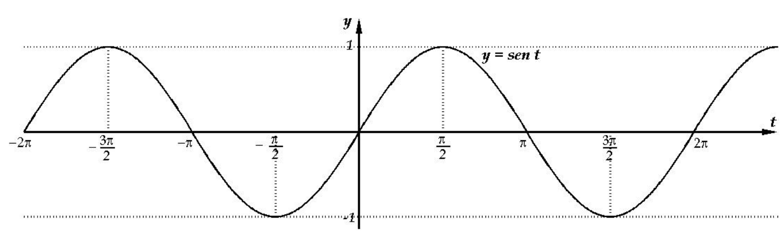
Para trazar la gráfica de $y = sen\ t$ en el plano cartesiano, usamos el eje horizontal para los valores de la variable independiente t y el eje vertical para sus imágenes $y = sen\ t$. Graficamos inicialmente un período completo, y para ello escogemos el intervalo $[0, 2\pi]$. Aunque la variación de $y = sen\ t$ en este intervalo nos da una idea general de la gráfica, para trazarla con más precisión evaluamos la función $sen\ t$ en algunos valores de t y construimos la tabla:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sen\ t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Con esta información, graficamos el período de la función $sen\ t$ correspondiente a $0 \leq t \leq 2\pi$, así:



Como esta función tiene período 2π, entonces la gráfica se repite en cada intervalo sucesivo de longitud 2π a la derecha y a la izquierda de $[0, 2\pi]$, y entonces la gráfica de $y = sen\ t$ es:



Es claro que $D_{sen} = \mathbb{R}$ y $R_{sen} = [-1, 1]$.

6.8.7.2.5 Función coseno

De manera similar como lo hicimos con la función seno, podemos analizar la variación de $\cos t$, estudiando el comportamiento de la abscisa x del punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, cuando t varía, lo cual resumimos en la siguiente tabla:

t	$x = \cos t$
$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$	$1 \longrightarrow 0$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$0 \longrightarrow -1$
$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$-1 \longrightarrow 0$
$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$0 \longrightarrow 1$

Puede verificarse fácilmente que

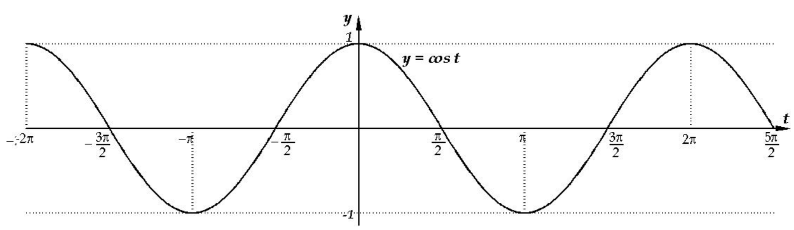
$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego coseno es una función periódica de período 2π.

6.8.7.2.5.1 Gráfica de la función coseno

Con base en el análisis anterior, construyendo la tabla de valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, usando el eje horizontal para los valores de la variable t y el eje vertical para sus imágenes $y = \cos t$, y el hecho de que es una función periódica, la gráfica de $y = \cos t$ es:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$D_{\cos} = R$ y $R_{\cos} = [-1, 1]$.

6.8.7.2.6 Función tangente

¿Cómo cambia la función tangente cuando $P = (x, y)$ se mueve en la circunferencia unitaria?

Como $\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, y $sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, a medida que x se acerca a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda $\tan x$ toma valores cada vez mayores, lo cual se simboliza: $\tan x \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^{-}$.

Similarmente, como $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $sen\ \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ cuando x se acerca a $-\frac{\pi}{2}$, por la derecha, $\tan x$ toma valores cada vez menores. En símbolos: $\tan x \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}^{+}$.

La función tangente no está definida en $t = -\frac{\pi}{2}$ ni en $t = \frac{\pi}{2}$, de hecho, no está definida para $t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, porque para estos ángulos el coseno es igual a cero.

t	$\tan t$
$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$	$-\infty \to 0$
$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \to \infty$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$-\infty \to 0$
$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \to \infty$
$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$-\infty \to 0$
$2\pi \to \frac{5\pi}{2}$	$0 \to \infty$

El comportamiento de la función tangente para valores de $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es el mismo que si $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, y el mismo para $t \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, y así:

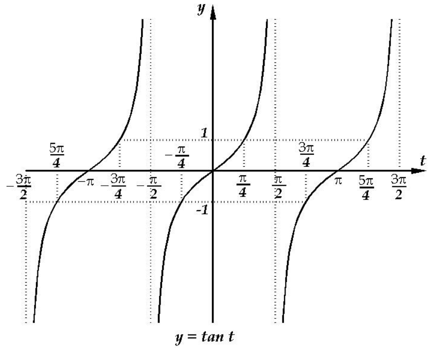
$$\tan(t + n\pi) = \tan t \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego la función tangente es periódica de período π.

6.8.7.2.6.1 Gráfica de la función tangente

Para trazar la gráfica de $y = \tan t$ usamos el hecho que es periódica con período π, graficamos el período completo que corresponde al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y calculamos algunos valores de la función en dicho intervalo.

t	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞



$y = \tan t$

$D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{t \ \in \ \mathbb{R} \ / \ t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ \ n \ \in \ \mathbb{Z}\right\}$ y $R_{\tan} = \mathbb{R}$.

6.8.7.2.7 Gráficas de las otras funciones trigonométricas

Para graficar las otras tres funciones trigonométricas, $y = \cot t$, $y = \sec t$, $y = \csc t$, utilizamos las siguientes relaciones, llamadas *identidades recíprocas*, las cuales se deducen fácilmente a partir de las definiciones:

i) $\cot t = \frac{1}{\tan t}$

ii) $\sec t = \frac{1}{\cos t}$

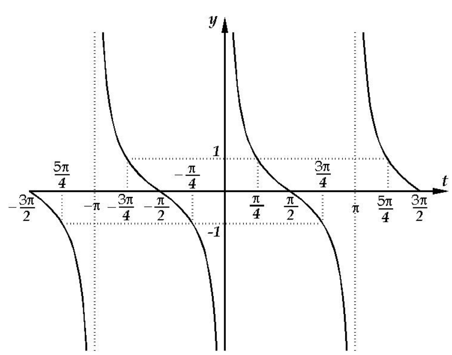
iii) $\csc t = \frac{1}{sen\ t}$

Con base en estas identidades, podemos mostrar que los respectivos dominios son:
$D_{\text{cot}} = D_{\text{csc}} = \mathbb{R} - \{t \ \in \ \mathbb{R} \ / \ t = n\ \pi, \ \ n \ \in \ \mathbb{Z}\}$

$D_{\text{sec}} = D_{\text{tan}} = \mathbb{R} - \left\{t \ \in \ \mathbb{R} \ / \ t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ \ n \ \in \ \mathbb{Z}\right\}$

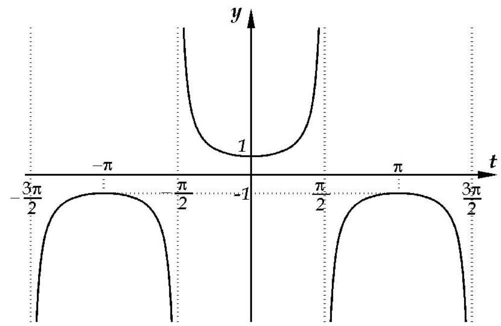
Razonando en forma similar como se hizo con las funciones seno, coseno y tangente tenemos que:
$\cot(t + n\pi) = \cot t$, $n \ \in \ \mathbb{Z}$
$\sec(t + 2n\pi) = \sec t$, $n \ \in \ \mathbb{Z}$
$\csc(t + 2n\pi) = \csc t$, $n \ \in \ \mathbb{Z}$
y así: cotangente tiene período π y secante y cosecante tienen período 2π.

Con base en la información anterior y un análisis similar al que se hizo para graficar la función tangente, la gráfica de la función $y = \cot t$ es

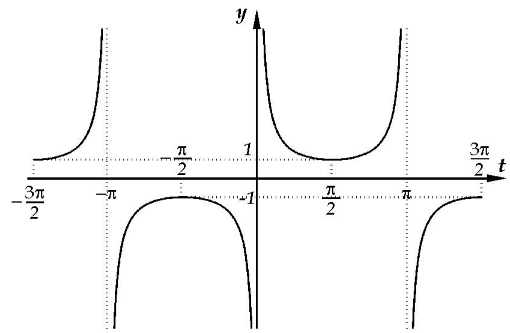


$y = \cot t$

Para graficar $y = \sec t$ y $y = \csc t$, usamos los recíprocos de las ordenadas de los puntos de las gráficas de $y = \cos t$ y $y = sen\ t$, respectivamente y obtenemos:



y = sec t

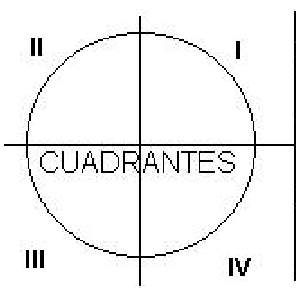


y = csc t

Como $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ y $\csc t = \frac{1}{sen\ t}$, estas funciones no están definidas en los valores para los cuales $\cos t = 0$ y $sen\ t = 0$, respectivamente.

6.8.7.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Observando las gráficas de las funciones trigonométricas realice un cuadro donde se establezcan los signos de las funciones seno, coseno y tangente dependiendo del cuadrante.



CUADRANTE	SENO	COSENO	TANGENTE
I			
II			
III			
IV			

2. Dibuje el gráfico de la función $f(x) = A\ sen\ x$ para valores de $A = 1$, $A = \frac{1}{2}$, $A = 2$.

3. Sabiendo que $270° < \alpha < 360°$, y que $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Calcule las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

4. Calcule los valores de las expresiones siguientes:

   (a) $5sen^2 45° + 8\cos^2 30°$

   (b) $3sen30° + 6\cos^2 45°$

   (c) $5\tan^2 45° + 2\sec^2 45°$

   (d) $4\cos 60° + 5\csc 30°$

   (e) $4\cos 30° + 6sen45°$

   (f) $6\tan 30° + 2\csc 45°$

   (g) $sen^2 30° + \sec^2 45°$

   (h) $\cos^2 60° + Sen^2 45°$

   (i) $\csc^2 45° + \cos^2 30°$

   (j) $\csc^2 30° + \tan^2 45°$

6.8.7.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Haga una gráfica de cada uno de los siguientes pares de funciones: a) y b); a) y c); a) y d):

   (a) $f(x) = sen\ x$

   (b) $f(x) = sen(x + 30)$

   (c) $f(x) = sen(x - 60)$

   (d) $f(x) = sen(x + 90)$

      i. Para cada una de las funciones indicar el período y amplitud.
      ii. ¿Cuál es el efecto en la gráfica de $y = senx$ al sumar o restar una constante del ángulo?
      iii. ¿Se mantiene este mismo patrón para la gráfica de la función del coseno? ¿Y para la función tangente? Explica.

2. Bosqueje la gráfica de:

   (a) $f(x) = 2sen(x + \frac{\pi}{4})$

   (b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2})$

   (c) $f(x) = 2tan(x + \frac{\pi}{4})$

   (d) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x)$

3. Utilice el círculo unitario para encontrar el valor exacto de cada función trigonométrica.

   (a) $\cos 210°$

   (b) $\tan \frac{5\pi}{3}$

   (c) $sen\ 225°$

   (d) $\tan \frac{5\pi}{6}$

4. Determine el dominio y recorrido de las funciones cotangente, secante y cosecante. Graficar dichas funciones.

5. Calcule las razones de los siguientes ángulos: $225°$, $330°$, $2655°$, $-840°$.

6. Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, y que $180° < \alpha < 270°$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

7. Sabiendo que $\sec\alpha = 2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcular las restantes razones trigonométricas.

8. Dibuje el gráfico de la función $y = A\ sen(q + f)$ para a $f = 0$ rad, $f = \frac{p}{6}$, $f = \frac{-p}{6}$.

9. Utilizando el círculo de radio unitario observe que el valor del arco circular s es igual al valor del ángulo q expresado en radianes. En una función trigonométrica la variable independiente es el ángulo q y la variable dependiente y, a las funciones donde y es la variable independiente y q la variable dependiente se les conoce como funciones trigonométricas inversas, realice gráficos.

   (a) $\theta = Arc.sen\ y$
   (b) $\theta = Arc.cos\ y$
   (c) $\theta = Arc.tan\ y$
   (d) $\theta = sen^{-1}y$
   (e) $\theta = \cos^{-1} y$
   (f) $\theta = \tan^{-1} y$

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Identidades Trigonométricas

6.8.8 Identidades trigonométricas

6.8.8.1 Objetivo de aprendizaje

- Adquirir el concepto de identidad trigonométrica, de tal forma que se resuelvan ejercicios de aplicación.

6.8.8.2 Matemática formal

La ecuación $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ es una identidad porque es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

La ecuación $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ es una identidad para $x \neq \pm 1$, porque para esos valores están definidas las expresiones que aparecen en la igualdad.

La ecuación $x^2 - 1 = 0$ no es una identidad, porque sólo es válida para $x = \pm 1$.

Una identidad matemática es un tipo de igualdad matemática entre expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor de alguna variable de las tantas que intervienen. Se diferencia de una ecuación en que las ecuaciones sólo se verifican para algunos valores concretos de las variables, los valores llamados solución de la ecuación.

Si una identidad contiene expresiones trigonométricas, se denomina *identidad trigonométrica*. Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones.

Veremos inicialmente unas identidades trigonométricas básicas, llamadas *identidades trigonométricas fundamentales*, que nos permiten expresar una función trigonométrica en términos de las otras, simplificar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

6.8.8.2.1 Identidades trigonométricas fundamentales

- **Identidades recíprocas**

  Se deducen directamente de la definición de las funciones trigonométricas:

$$sen\ t = \frac{1}{\csc t}; \qquad \csc t = \frac{1}{sen\ t}; \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t}; \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

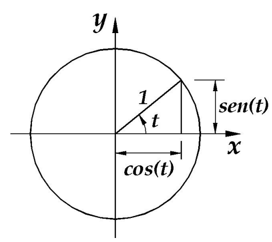
$$\tan t = \frac{1}{\cot t}; \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}; \qquad \tan t = \frac{sen\ t}{\cos t}; \qquad \cot t = \frac{\cos t}{sen\ t}$$

- **Identidades Pitagóricas**

$$\begin{aligned} sen^2\ t + \cos^2\ t &= 1 \\ 1 + \tan^2\ t &= \sec^2\ t \\ 1 + \cot^2\ t &= \csc^2\ t \end{aligned}$$

Prueba:

En la circunferencia unitaria consideremos un ángulo en posición estándar cuya medida en radianes es t y sea $P = (x, y)$ el punto en el que el lado terminal del ángulo t interseca la circunferencia unitaria.



Como $sen\ t = y$ y $\cos t = x$, por el *Teorema de Pitágoras*

$$sen^2 t\ + \cos^2\ t = 1. \tag{6.4}$$

Si en (6.4), dividimos ambos lados de la ecuación por $\cos^2\ t$, $\cos t \neq 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{sen^2\ t}{\cos^2\ t} + \frac{\cos^2\ t}{\cos^2\ t} &= \frac{1}{\cos^2\ t} \\ \tan^2\ t + 1 &= \sec^2\ t. \end{aligned}$$

Si en (6.4), dividimos ambos lados de la ecuación por $sen^2\ t$, $sen\ t \neq 0$, obtenemos:

$$\frac{sen^2\ t}{sen^2\ t} + \frac{\cos^2\ t}{sen^2\ t} = \frac{1}{sen^2\ t}$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t.$$

6.8.8.2.2 Simplificación de expresiones trigonométricas

Para simplificar expresiones trigonométricas utilizamos las mismas técnicas empleadas para simplificar expresiones algebraicas y las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 6.8.3 *Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas:*

1. $\cos^3 x + sen^2 x \cdot \cos x$
2. $\frac{1+\cot A}{\csc A}$
3. $\frac{sen\ y}{\cos y} + \frac{\cos y}{1+sen\ y}$

Solución

1. $\cos^3 x+sen^2 x\cdot\cos x = \cos^2 x\cdot\cos x+sen^2 x\cdot\cos x = \left(\cos^2 x + sen^2 x\right)\cos x = 1\cdot\cos x = \cos x.$
2. $\frac{1+\cot A}{\csc A} = \frac{1+\frac{\cos A}{sen\ A}}{\frac{1}{sen\ A}} = \frac{\frac{sen\ A+\cos A}{sen\ A}}{\frac{1}{sen\ A}} = \frac{sin\ A(sen\ A+\cos A)}{sen\ A} = sen\ A + \cos A.$
3. $\frac{sen\ y}{\cos y} + \frac{\cos y}{1+sen\ y} = \frac{sen\ y(1+sen\ y)+\cos y\cdot\cos y}{\cos y(1+sen\ y)} = \frac{sen\ y+sen^2 y+\cos^2 y}{\cos y(1+sen\ y)} = \frac{sen\ y+1}{\cos y(1+sen\ y)} = \frac{1}{\cos y} = \sec y$

6.8.8.2.3 Demostración de identidades trigonométricas

Además de las identidades trigonométricas fundamentales, hay otras identidades importantes que se usan en otros cursos de matemáticas y de física. Dada una ecuación es fácil probar que no es una identidad, hallando al menos un valor de la variable (o variables) para el cual no se satisfaga la ecuación.

Ejemplo 6.8.4 *Demuestre que la ecuación $sen\ x + \cos x = 1$ no es una identidad trigonométrica.*

Solución

Para demostrar que, $sen\ x + \cos x = 1$ no es una identidad, basta encontrar un valor de x para el cual no se cumpla la ecuación.

Consideremos $x = \frac{\pi}{4}$: $sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego,

$$sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Como $sen\ x$ y $\cos x$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ no satisface la ecuación, entonces $sen\ x + \cos x = 1$ no es una identidad.

Ejemplo 6.8.5 *Demuestre que la ecuación* $\tan x + 1 = 2$ *no es una identidad..*

Solución

Consideremos $x = \frac{\pi}{6}$:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{sen\ \frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } \tan\frac{\pi}{6} + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \neq 2.$$

Luego, $\tan x + 1 = 2$ no es una identidad.

6.8.8.2.4 ¿Cómo probar que una ecuación es una Identidad?

Para probar que una ecuación es una identidad trigonométrica, debemos elegir un lado de la ecuación y transformarlo, usando identidades conocidas y operaciones algebraicas, hasta obtener el otro lado de la ecuación.

Algunas sugerencias para realizar este trabajo son:

- Escoger el lado "más complicado" de la ecuación para transformarlo.
- Realizar operaciones algebraicas como sumar o restar fracciones; o expresar una fracción como una suma de fracciones; o factorizar numerador o denominador de una fracción, entre otras.
- Tener en cuenta la expresión del lado de la ecuación al cual se quiere llegar ya que ésta le puede sugerir el paso siguiente.
- En algunos casos, es útil expresar el lado de la ecuación a transformar en términos de seno y coseno, usando las identidades fundamentales.

Otro método para probar que una ecuación es una identidad es transformar ambos lados por separado hasta obtener en cada lado la misma expresión. En este caso no necesariamente realizamos las mismas operaciones en ambos lados, sino que trabajamos independientemente en cada lado hasta obtener el mismo resultado en ambos lados.

Ejemplo 6.8.6 *Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:*

1. $\frac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$
2. $2\tan x \sec x = \frac{1}{1-sen\ x} - \frac{1}{1+sen\ x}$
3. $\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$

Solución

1. Transformemos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1+\sec^2 x}{\sec^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 + 1 = 1 + \cos^2 x.$$

Luego, $\frac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$ es una identidad trigonométrica.

2. Escojamos el lado derecho:

$$\frac{1}{1-sen\ x} - \frac{1}{1+sen\ x} = \frac{1+sen\ x-(1-sen\ x)}{(1-sen\ x)(1+sen\ x)} =$$
$$= \frac{2sen\ x}{1^2 - sen^2 x} = \frac{2sen\ x}{\cos^2 x} = 2\frac{sen\ x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 2\tan x \sec x.$$

Luego, la ecuación dada es una identidad trigonométrica.

3. Trabajemos con ambos lados separadamente:

Lado izquierdo: $\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \sec x + 1$

Lado derecho: $\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \frac{(\sec x+1)(\sec x-1)}{\sec x - 1} = \sec x + 1.$

Como al transformar cada lado de la ecuación se obtiene la misma expresión, la ecuación dada es una identidad.

6.8.8.2.5 Otras identidades trigonométricas importantes

Existen otras identidades trigonométricas importantes que involucran más de un ángulo o múltiplos de un ángulo.

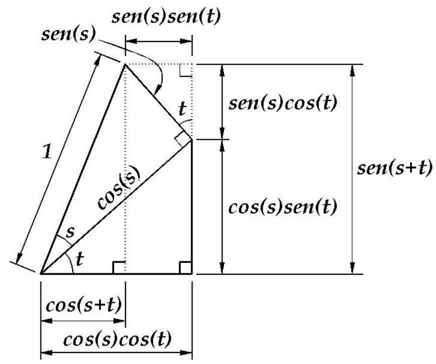
6.8.8.2.5.1 Fórmulas de adición y sustracción

1. **Suma**

$sen\ (s+t) = sen\ s \cos t + \cos s\ sen\ t$
$\cos(s+t) = \cos s \cos t - sen\ s\ sen\ t$
$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$

Prueba

Las fórmulas para seno y coseno de la suma de ángulos se deducen de la siguiente gráfica



Por otro lado, la tangente de una suma se puede probar de la siguiente forma:

$$\tan(s+t) = \frac{sen\ (s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{sen\ s\cos t + \cos s\ sen\ t}{\cos s\cos t - sen\ s\ sen\ t} = \frac{\frac{sen\ s\cos t}{\cos s\cos t} + \frac{\cos s\ sen\ t}{\cos s\cos t}}{\frac{\cos s\cos t}{\cos s\cos t} - \frac{sen\ s\ sen\ t}{\cos s\cos t}} = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s\tan t}$$

2. **Sustracción**

$sen\ (s-t) = sen\ s\cos t - \cos s\ sen\ t$
$\cos(s-t) = \cos s\cos t + sen\ s\ sen\ t$
$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1+\tan s\tan t}$

Prueba

Las fórmulas para seno y coseno de la diferencia de ángulos se obtienen escribiendo $sen\ (s-t) = sen\ (s+(-t))$ y $\cos(s-t) = \cos(s+(-t))$ y teniendo en cuenta que $sen\ (-t) = -sen\ t$ y $\cos(-t) = \cos t$.

Ejemplo 6.8.7 *Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones, sin emplear calculadora:*

1. $\cos(20°)\cos(70°) - sen\ (20°)\,sen\ (70°)$
2. $\tan\frac{7\pi}{12}$

Solución

1. $\cos(20°)\cos(70°) - sen\ (20°)\,sen\ (70°) = \cos(20° + 70°) = \cos(90°) = 0$
2. $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

6.8.8.2.5.2 Expresiones de la forma $A\ sen\ x + B\ sen\ x$

Las expresiones de la forma $A\ sen\ x + B\ sen\ x$ siempre pueden escribirse en la forma $k\ sen\ (x+\phi)$ o $k\cos(x+\phi)$.

Veamos:

Ejemplo 6.8.8 *Exprese* $\frac{1}{2}\ sen\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ *en la forma* $k\cos(x+\phi)$.

Solución

$$\begin{aligned} k\cos(x+\phi) &= k\left[\cos x\cos\phi - sen\ x\ sen\phi\right] \\ &= k\cos x\cos\phi - k\ sen\ x\ sen\ \phi \\ &= (-k\ sen\phi)\ sen\ x + (k\cos\phi)\cos x. \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad es necesario que

$$-k\ sen\phi = \frac{1}{2} \text{ y que } k\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones:

$$k^2\ sen^2\phi = \frac{1}{4} \text{ y } k^2\cos^2\phi = \frac{3}{4}.$$

Ahora, sumando:

$$\begin{aligned} k^2\ sen^2\phi + k^2\cos^2\phi &= \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \\ k^2\left(sen^2\phi + \cos^2\phi\right) &= \frac{4}{4} = 1 \\ k^2\cdot 1 &= 1 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

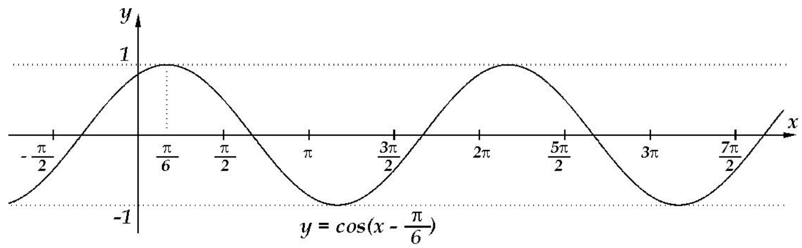
De esta forma:

$$\begin{aligned} -k\ sen\phi &= \frac{1}{2} : -1\ sen\phi = \frac{1}{2} :\ sen\phi = -\frac{1}{2} \\ k\cos\phi &= \frac{\sqrt{3}}{2} : 1\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} : \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Como $sen\phi < 0$ y $\cos\phi > 0$, ϕ se encuentra en el IV cuadrante. Por lo tanto, $\phi = -\frac{\pi}{6}$.

Así,

$$\frac{1}{2}\ sen\ x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1\cos\left(x+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$



6.8.8.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $\dfrac{sen^2\varphi\,(1+\csc\varphi)}{1+\csc\varphi sen^2\varphi}$

   (b) $\dfrac{sen^3 x+\cos^3 x}{sen\ x+\cos x}$

   (c) $\dfrac{\cot^2\theta-4}{\cot^2\theta-\cot\theta-6}$

2. Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

   (a) $\dfrac{1}{1-\cos v}+\dfrac{1}{1+\cos v}=2\csc^2 v$

   (b) $\csc\theta-sen\ \theta=\cot\theta\cos\theta$

   (c) $\tan t+2\cos t\csc t=\sec t\csc t+\cot t$

   (d) $(\sec u-\tan u)(\csc u+1)=\cot u$

   (e) $sen^4 r-\cos^4 r=sen^2 r-\cos^2 r$

6.8.8.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Verifique en cada caso la identidad dada

   (a) $\dfrac{sen\ x}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}=1$

   (b) $\dfrac{1-sen\ x}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{1+sen\ x}$

   (c) $\dfrac{\sec x}{\tan x+\cot x}=sen\ x$

   (d) $\dfrac{1-\cos x}{sen\ x}=\dfrac{sen\ x}{1+\cos x}$

   (e) $\dfrac{1}{\sec x-\tan x}=\sec x+\tan x$

   (f) $\dfrac{1}{\csc x-\cot x}=\csc x+\dfrac{1}{\tan x}$

   (g) $\dfrac{\cot^2 x}{\csc x-1}=\csc x+sen^2 x+\cos^2 x$

(h) $\dfrac{\tan x - sen\ x}{sen^3 x} = \dfrac{\sec x}{1 + \cos x}$

(i) $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{sen\ x \cos x}$

(j) $\sec x + \cos^2 x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sec^2 x}$

(k) $\dfrac{\csc x}{\tan x + \cot x} = \cos x$

(l) $(1 - sen^2 x)(1 + \tan^2 x) = 1$

(m) $\cot^2 x + sen^2 x = \csc^2 x - \cos^2 x$

(n) $\tan^2 x + \dfrac{1}{sen\ x \csc x} = \sec^2 x$

(o) $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = sen^2 x$

(p) $\dfrac{1 + \cos t}{sen\ t} + \dfrac{sen\ t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$

(q) $\tan^4 v - \sec^4 v = 1 - 2 \sec^2 v$

(r) $\csc \theta - sen\theta = \cot \theta \cos \theta$

(s) $\tan t + 2 \cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$

(t) $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

(u) $sen^4 r - \cos^4 r = sen^2 r - \cos^2 r$

(v) $\dfrac{1}{1 - \cos v} + \dfrac{1}{1 + \cos v} = 2 \csc^2 v$

2. Pruebe las siguientes identidades:

(a) $e^{iz} = \cos z + i\ sen\ z$

(b) $sen\ (p/2 - z) = \cos z$

(c) $sen^2 z + \cos^2 z = 1$

(d) $\tan(2z) = \dfrac{2 \tan(z)}{1 - \tan^2(z)}$

(e) $sen\ (z_1 + z_2) = sen\ z_1 \cos z_2 + sen\ z_2 \cos z_1$

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Matemáticas Básicas

Ecuaciones Trigonométricas

6.8.9 Ecuaciones trigonométricas

6.8.9.1 Objetivo de aprendizaje

- Identificar y resolver ecuaciones trigonométricas.

6.8.9.2 Matemática formal

Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación en términos de expresiones trigonométricas, para la cual las variables o incógnitas son números reales, que representan la medida en radianes de ángulos.

Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el ángulo, o los ángulos que satisfacen la ecuación, es decir, los ángulos que convierten la ecuación en una proposición verdadera.

Para resolver una ecuación trigonométrica usamos las operaciones algebraicas y las identidades trigonométricas para escribir, en términos de una función trigonométrica, y a un lado del signo igual, todas las expresiones trigonométricas, y luego encontramos los ángulos que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 6.8.9 *Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica* $\csc^2 x - 4 = 0$.

Solución

$$(\csc x + 2)(\csc x - 2) = 0$$

$$\csc x + 2 = 0 \text{ o } \csc x - 2 = 0$$

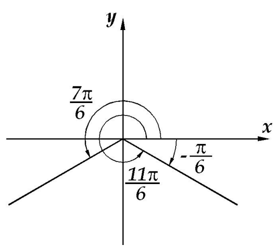
$$\csc x = -2 \text{ o } \csc x = 2$$

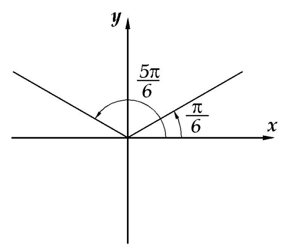
$$\frac{1}{sen\ x} = -2 \text{ o } \frac{1}{sen\ x} = 2$$

$$sen\ x = -\frac{1}{2} \text{ o } sen\ x = \frac{1}{2}$$

Hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, los ángulos en dicho intervalo que satisfacen estas ecuaciones:

- $sen\ x = -\frac{1}{2}$ si $x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$
- $sen\ x = \frac{1}{2}$ si $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{5\pi}{6}$





Luego, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ y $x = \frac{11\pi}{6}$ son las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$

Como la función seno es periódica, de período 2π, todas las soluciones en $\mathbb{R}$ se obtienen sumando los múltiplos enteros de 2π a las soluciones halladas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Así,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ y } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

son las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 6.8.10 *Resuelva la siguiente ecuación:* $2\cos^2 x + sen\ x = 1$,

Solución

$$\begin{aligned}
2\left(1 - sen^2 x\right) + sen\ x &= 1 \\
2 - 2sen^2 x + sen\ x &= 1 \\
2sen^2 x - sen\ x - 1 &= 0 \\
sen\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
sen\ x &= \frac{1 \pm 3}{4}
\end{aligned}$$

$$sen\ x = \frac{4}{4} = 1 \text{ o } sen\ x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$sen\ x = 1 \text{ si } x = \frac{\pi}{2} \text{ y } sen\ x = -\frac{1}{2} \text{ si } x = \frac{7\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}.$$

Con base en la periodicidad de la función seno, las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación son:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ , } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ y } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in\ \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.8.11 *Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:* $2sen\ 3x - 1 = 0$.

Solución

$$sen\ 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in\ \mathbb{Z}$$

Luego, todas las soluciones en R de la ecuación son de la forma:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ y } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in\ \mathbb{Z}$$

Luego, todas las soluciones en R de la ecuación son de la forma:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ y } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in\ \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.8.12 *Halle los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:* $\cos x + 1 = sen\ x$.

Solución

$$\begin{aligned}
(\cos x + 1)^2 &= sen^2 x \\
\cos^2 x + 2\cos x + 1 &= sen^2 x \\
\cos^2 x + 2\cos x + 1 &= 1 - \cos^2 x \\
2\cos^2 x + 2\cos x &= 0 \\
2\cos x\,(\cos x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

$$2\cos x = 0 \text{ o } \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ o } \cos x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ , \ x = \pi + 2k\pi, \ k \in \ \mathbb{Z}$$

Ahora, como en el procedimiento para resolver la ecuación elevamos al cuadrado, debemos determinar cuáles de estos valores de x satisfacen la ecuación original.

- Si $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $sen\frac{\pi}{2} = 1$. Por lo tanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \ \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.
- Si $x = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $sen\frac{3\pi}{2} = -1$. Por lo tanto $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \ \mathbb{Z}$ no es solución de la ecuación original.
- Si $x = \pi$, $\cos\pi + 1 = -1 + 1 = 0$ y $sen\ \pi = 0$. Por lo tanto $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \ \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.

Luego, las soluciones de la ecuación original son:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ y } x = \pi + 2k\pi, \ k \in \ \mathbb{Z}$$

Ejemplo 6.8.13 *Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:* $\cos 5x - \cos 7x = 0$.

Solución

$$\begin{array}{rcl} \cos(6x - x) - \cos(6x + x) & = & 0 \\ \cos 6x \cos x + sen\ 6x\ sen\ x - \cos 6x \cos x + sen\ 6x & & \\ sen\ x & = & 0 \\ 2sen\ 6x\ sen\ x & = & 0 \end{array}$$

$$sen\ 6x = 0 \text{ o } sen\ x = 0$$

$$6x = k\pi \text{ o } x = k\pi, \ k \in \ \mathbb{Z}$$

Entonces,

$$x = \frac{k\pi}{6} \text{ y } x = k\pi, \ k \in \ \mathbb{Z}$$

son las soluciones de la ecuación original.

6.8.9.3 Ejercicios y problemas para resolver en clase

1. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $2sen\ x = \cos x$
2. $sen\ 9x - \cos 9x = 0$
3. $\cos 2x - 7sen\ 2x = 0$
4. $sen(3x + 2) = 5\cos(3x + 2)$
5. $20sen(5x + 7) = -5\cos(5x + 7)$
6. $5\cos x = 6sen\ x$
7. $12sen\ 10x = 4\cos 10x$
8. $8sen(2x - 2) = 4\cos(2x - 2)$
9. $\cos(x - 7) - 3sen(x - 7) = 0$
10. $12sen(9 - 2x) = 6\cos(9 - 2x)$

6.8.9.4 Ejercicios y problemas de estudio extraclase

1. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(a) $sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$

(c) $3sen^2 x - 5sen\ x + 2 = 0$

(d) $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

(e) $\cos 2x = 1 + 4sen\ x$

(f) $\cos 2x = 1 + 4sen\ x$

(g) $sen\,(2x + 60°) + sen\,(x + 30°) = 0$

(h) $sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

(i) $\cos 8x + \cos 6x = 2\cos 210° \cos x$

(j) $\tan 2x = -\tan x$

(k) $sen\ x + \sqrt{3}\cos x = 2$

(l) $sen\ 2x = \cos 60°$

(m) $4sen\,(x - 30°)\cos(x - 30°) = \sqrt{3}$

(n) $2\cos x = 3\tan x$

(o) $sen\ 2x\cos x = 6sen^3 x$

(p) $4sen\frac{x}{2} + 2\cos x = 3$

(q) $3sen\ 2x\cos x - 2sen\ 2x = 0$

(r) $16sen\ 2x - \cos 2x = 0$

(s) $4sen\ 2x - 9\cos 2x = 0$

(t) $8sen\ x\tan 5x - 3\tan 5x = 0$

(u) $6sen\ 2x + 7sen\ x\cos x - 3\cos 2x = 0$

(v) $25\cos 2x - \tan 2x = 0$

(w) $4\cos 2x - \tan 2x = 0$

(x) $5sen\ x\tan 3x + \tan 3x = 0$